Pauta Aux 7: Oscilaciones #1

Aux: matiasvergara@gmail.com (Dudas y consultas)

P1] Péndulo físico

a) $I_0 = I_{CM} + MD^2$ (Fórmula)

$= I_{CM} + M \cdot d^2$ (Reemplazando)

// Listo, conocemos I_0.
(En el propuesto será un poco más "matraquero")

b) $\sum \tau = I\alpha$ (Fórmula)

$\sum \tau = I_0 \alpha$ (Torque c/r a 0)

Veamos los torques:

→ la única fuerza en juego es el peso; en la dirección de sen θ · Hip.
Hip = d.

$\sum \tau = -dMg \operatorname{sen} \theta$

$\Rightarrow -dMg \operatorname{sen} \theta = I_0 \alpha$

α es la aceleración angular.
Al igual que en la aceleración traslacional, tenemos:

$a = \dot{v} = \ddot{r}$ (r = posición = x)

(*) $\alpha = \underbrace{\dot{\omega}}_{\text{VEL. ANG.} \, (\neq \text{FREC})} = \ddot{\theta}$ (θ = ángulo)

(*): De aquí en delante, siempre utilizaremos $\alpha = \ddot{\theta}$ para llegar a la expresión conocida.

Reemplazamos:

$-dMg \operatorname{sen} \theta = I_0 \ddot{\theta}$

Dejamos el término con $\ddot{\theta}$ sumando y todo a ese lado:

$I\ddot{\theta} + dMg \operatorname{sen} \theta = 0$

Ahora, utilizando la apróx. para pequeñas osc.: $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$

c) $I\ddot{\theta} + dMg\theta = 0$

Normalizamos (Esto corresponde a dividir por lo que acompaña al $\ddot{\theta}$ de mayor grado de derivación).

En este caso es I_0:

$// : I_0$

$$= \ddot{\theta} + \frac{dMg\theta}{I_0} = 0$$

Que es la EDO que conocemos.

d) Sabemos que el coef. que acompaña a θ es ω^2, luego

$$\omega_0^2 = \frac{dMg}{I_0}$$

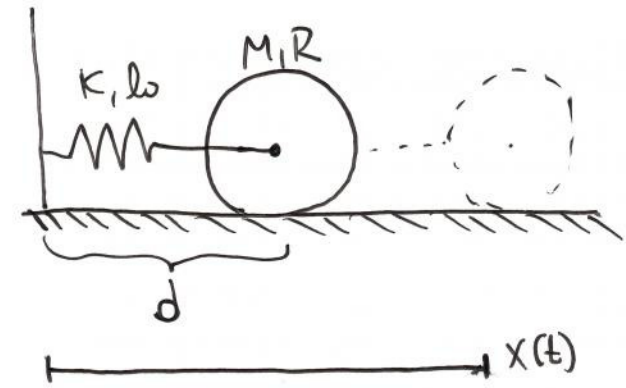
$$\Rightarrow \omega_0 = \pm\sqrt{\frac{dMg}{I_0}}$$

$$y \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{dMg}}$$

⇒ El propuesto es el lab, así que esta vez no tendrá pauta. ¡Es lo mismo, solo deben calcular un I_0 distinto!

Buena suerte.

P2



(a) Por cons. de energía:

$$E_i = \underbrace{MgR}_{\text{Pot. Grav. c/r a CM}} + \underbrace{\frac{K(d-l_0)^2}{2}}_{\text{Elástica}}$$

$$E_f = MgR + \frac{K(x-l_0)^2}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{CM}\cdot\omega^2}_{\text{Cinética Rotacional}} + \underbrace{\frac{1}{2} M v^2}_{\text{Cinética traslacional}}$$

" "

(c/r a una posición final x)

$E_f - E_i$:

$$\frac{Kx^2 - 2Kl_0(x-d)}{2} + \frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} M v^2 = 0$$

$$\left(V = \dot{x}\ ;\ w = \frac{\dot{x}}{R}\right)$$

$$= \frac{Kx^2 - 2Kl_0(x-d)}{2} + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\cdot\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} M\dot{x}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Kx^2 - 2Kl_0(x-d)}{2} + \frac{M\dot{x}^2}{4} + \frac{M\dot{x}^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Kx^2 - 2Kl_0(x-d)}{2} + \frac{3M\dot{x}^2}{4} = 0$$

// derivamos c/r al tiempo para hacer aparecer $\ddot{x}$

$$\Rightarrow \frac{K\cdot \cancel{2}x\cdot \cancel{\dot{x}} - \cancel{2}K l_0 \cancel{\dot{x}}}{\cancel{2}} + \frac{3M}{\cancel{4}}\left(\cancel{2}\cancel{\dot{x}}\ddot{x}\right) = 0 \quad /:\dot{x}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}Kx - \cancel{2}Kl_0 + \frac{3M\ddot{x}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow K(x-l_0) + \frac{3m\ddot{x}}{2} = 0$$

Cambio de var: $\tilde{x} = x - l_0$

$\dot{\tilde{x}} = \dot{x}$

$\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x}$

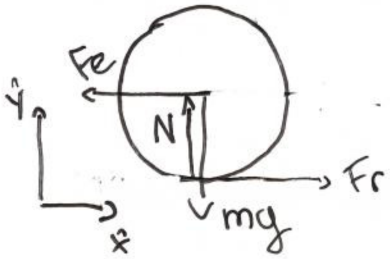
$$\Rightarrow K(\tilde{x}) + \frac{3m\ddot{\tilde{x}}}{2} = 0 \quad // \text{Normalizando (Dividir por } \tfrac{3m}{2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \ddot{\tilde{x}} + \frac{2K\tilde{x}}{3M} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\tilde{x}} + \frac{2K}{3M}\tilde{x} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{2K}{3M}}$$

(b) DCL



$$\sum \vec{F} = \vec{F}_e + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_R$$

$$\hat{x}]\ -K(x-l_0) - f_R = M\ddot{x} \qquad (\ddot{x} = a)$$

$$\sum \tau_{CM} = -f_R\cdot R = I_{CM}\cdot \alpha$$

$$\Rightarrow -f_R \cancel{R} = \frac{MR^{\cancel{2}}}{2}\alpha$$

$$\Rightarrow f_R = -\frac{MR}{2}\alpha$$

Además, $-\alpha = \frac{\ddot{x}}{R}$

$$\Rightarrow \boxed{f_r = \frac{M\ddot{x}}{2}}$$

Tomamos $-\alpha R = \ddot{x}$ por "conveniencia": Si $\alpha > 0$, gira con $\ddot{x} < 0$. Para ajustar signos se agrega el $-$.

$$\Rightarrow -k(x - l_0) = \frac{3M\ddot{x}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2k(x-l_0)}{3M} + \ddot{x} = 0$$

// Normalizando e igualando a 0 (pasando todo a un lado con $\ddot{x}$ sumando)

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\tilde{x}} + \frac{2k\tilde{x}}{3M} = 0}$$

$\tilde{x} = x - l_0$

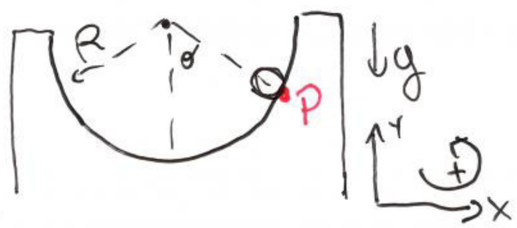
$\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x}$

Que es lo pedido:
Una expresión para la posición en función del tiempo.

(La sol a esta EDO la da, pues queda algo del estilo

$$\tilde{x}(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + l_0$$

P3| Esferita



Esfera radio $r \ll R$
R radio casquete cilíndrico
No resbala al rodar
La idea es encontrar el periodo de osc.

1. Escribimos las ec. de mov.

$\sum \tau_P : I_P \alpha = -rmg \operatorname{sen}\theta \quad (1)$

DCL

Donde $I_P = I_{CM} + mr^2$

$= \frac{2}{5}mr^2 + mr^2$

$= \frac{7}{5}mr^2$

De rodar sin resbalar: $x_{CM} = r\phi \;/\; \frac{d}{dt^2}$

(2) $a_{cm} = r\alpha$

Como el CM realiza mov. circunferencial:

$x_{CM} = (R-r)\theta \;/\; \frac{d}{dt^2}$

(3) $a_{cm} = (R-r)\ddot{\theta}$

$(2) = (3): \quad \alpha = \frac{(R-r)\ddot{\theta}}{r}$

En (1): Con $\alpha = \ddot{\theta}$

$\frac{7}{5}mr^2\left(\frac{R-r}{r}\right)\ddot{\theta} = -rmg \operatorname{sen}\theta$

$\rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{-5g \operatorname{sen}\theta}{7(R-r)}}$ Ec. de mov.

2. Aprox peq. osc:

$\operatorname{sen}\theta \approx \theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{-5g\theta}{7(R-r)}}$

3. Obtener la EDO

Dejamos todo a un lado con $\ddot{\theta} > 0$:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)}\theta = 0}$$

4. Encontrar frec. de oscilación

Identificamos ω_0^2 como el término que acompaña a θ en la EDO:

$$\omega_0^2 = \frac{5g}{7(R-r)}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

5. Encontrar periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

Dudas y consultas al correo: matiasvergara@ug.uchile.cl

Nos vemos! :)