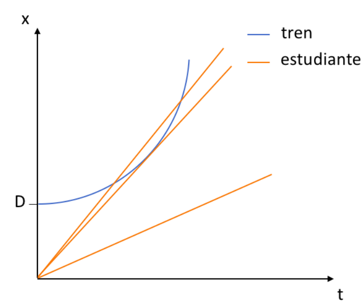
Pregunta control

Una estudiante llega a la estación de ferrocarril justo a tiempo para tomar el tren a Temuco. Cuando está a una distancia D de la portezuela más próxima del tren, este parte con aceleración constante a. Suponiendo que la estudiante corre a más no poder con velocidad constante V:

a) Haga un gráfico de la posición $x(t)$ del tren. En el mismo gráfico dibuje la función $x(t)$ correspondiente a la estudiante para diversos valores de la velocidad V.



b) Calcule el tiempo que demora y la distancia recorrida por la estudiante para alcanzar el tren.

La ec. de movimiento para el tren es

$$x_t = D + at^2/2$$

La ec. de movimiento para la estudiante es

$$x_e = Vt$$

Para alcanzar al tren, ambas posiciones deben ser iguales

$$D + at^2/2 = Vt \Rightarrow t_\pm = (V \pm \sqrt{V^2 - 2aD})/a$$

Lo alcanza en el menor tiempo, por lo que

$$t = (V - \sqrt{V^2 - 2aD})/a$$

La distancia recorrida por la estudiante es:

$$x = V(V - \sqrt{V^2 - 2aD})/a$$

c) Cuando alcanza al tren, ¿qué rapidez tiene el tren?

La velocidad del tren se calcula como $v = at$. Para el tiempo calculado anteriormente es

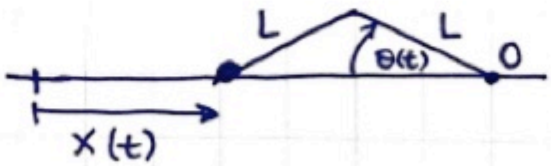
$$v = a(V - \sqrt{V^2 - 2aD})/a = (V - \sqrt{V^2 - 2aD})$$

d) Las ecuaciones que utilizó en (b) para calcular el tiempo tienen una segunda solución, ¿cuál es el significado de esta otra solución?

Significa que la estudiante en t_- pasa al tren y luego el tren la alcanza a ella en t_+.

e) ¿Existe alguna restricción sobre la velocidad V? Si es así, determine V_c, el valor crítico, para el cual el pasajero alcanza apenas el tren.

Si la velocidad de la estudiante no es lo suficientemente grande no alcanzará nunca al tren, por lo que sí debe existir una restricción sobre la velocidad. El tiempo calculado en (b) no existe si lo que está dentro de la raíz cuadrada es negativo, por lo que se debe cumplir que $V^2 > 2aD \Rightarrow V_c = \sqrt{2aD}$.



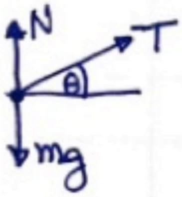
a) $X = 2L - 2L\cos\theta$

además $\left.\begin{array}{l} a = g\sqrt{3} \\ v(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow X(t) = \frac{1}{2} g\sqrt{3}\, t^2$ $\Bigg\} \Rightarrow 2L(1-\cos\theta) = \frac{1}{2} g\sqrt{3}\, t^2$

$1 - \cos\theta = \frac{1}{4L} g\sqrt{3}\, t^2$

$\therefore \boxed{\cos\theta = 1 - \frac{\sqrt{3}g}{4L} t^2}$ $\circledast$

b)



$T\cos\theta = ma \Rightarrow \boxed{T(\theta) = \frac{\sqrt{3}\,mg}{\cos\theta}}$

$T\,\mathrm{sen}\,\theta + N = mg$ $\circledast\circledast$

$T(\theta)$ en $\circledast\circledast$: $N = mg - \frac{\sqrt{3}\,mg\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \boxed{N(\theta) = mg\left[1 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\theta\right]}$

c) i) Sea θ_c el ∡ para el cual se alcanza la condición de corte de la cuerda (suponiendo que no ha habido despegue).

$\Rightarrow T(\theta = \theta_c) = T_{máx} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}\,mg}{\cos\theta_c} = mg\sqrt{6} \Rightarrow \cos\theta_c = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\theta_c = \pi/4}$

ii) Sea θ_d el ∡ para el cual la partícula alcanza la condición de despegue (suponiendo que la cuerda no se ha cortado).

$\Rightarrow N(\theta = \theta_d) = 0 \Rightarrow mg[1 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\theta_d] = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta_d = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\theta_d = \pi/6}$

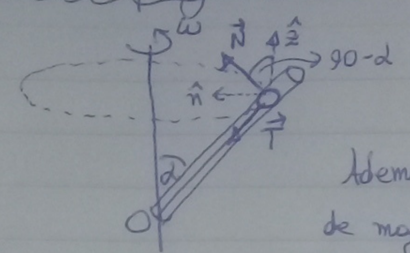
∴ La partícula alcanza primero su condición de despegue.

iii) Para determinar el instante en que esto ocurre, usamos la expresión $\circledast$ encontrada en (a).

$\cos(\theta_d) = \cos(\pi/6) = 1 - \frac{\sqrt{3}g}{4L} t_F^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}g}{4L} t_F^2$

$\Rightarrow \boxed{t_F = \sqrt{\frac{2L}{g}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)}}$

Pauta pregunta (3):



a) La aceleración vertical de la masa debe ser cero $\Rightarrow$ $N\,\text{sen}\,\alpha - T\cos\alpha = gm$ (1) (0.5)

Además existe una aceleración centrípeta a lo largo de $\hat{n}$ de magnitud $\frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \omega^2 L\,\text{sen}\,\alpha$.

$$\Rightarrow N\cos\alpha + T\,\text{sen}\,\alpha = \omega^2 L\,\text{sen}\,\alpha\, m \quad (2)$$ (0.5)

Juntemos ecuaciones (1) y (2): $\left(\frac{T\cos\alpha + gm}{\text{sen}\,\alpha}\right)\cos\alpha + T\,\text{sen}\,\alpha = \omega^2 L\,\text{sen}\,\alpha\, m$

$$\Rightarrow \boxed{T = \omega^2 L\,\text{sen}^2\alpha\, m - gm\cos\alpha}$$ (1.0)

(b) Si el tubo no realiza fuerza, $N=0 \Rightarrow T = -\frac{gm}{\cos\alpha}$

Si ponemos este resultado en ec. (2),

$$\cancel{\text{sen}\,\alpha}\cdot -\frac{g\cancel{m}}{\cos\alpha} = \omega^2 L\,\cancel{\text{sen}\,\alpha}\,\cancel{m}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = -\frac{g}{L}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{-g}{L}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}}$$ (2.0)

(c) $\Rightarrow \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ de modo que $\cos\alpha < 0$. (2.0)