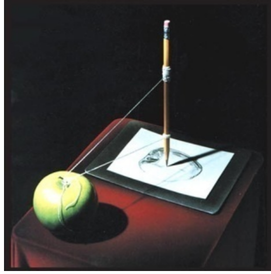
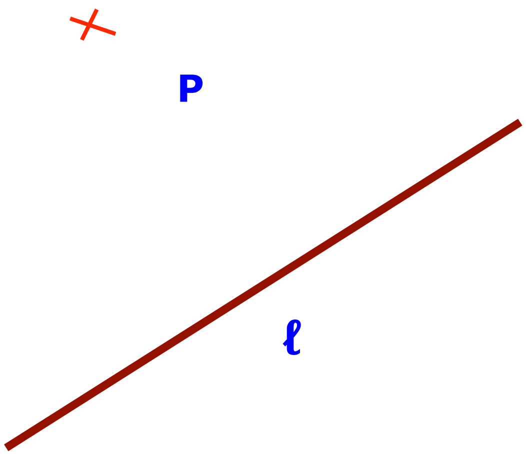
Introducción a la Física Newtoniana

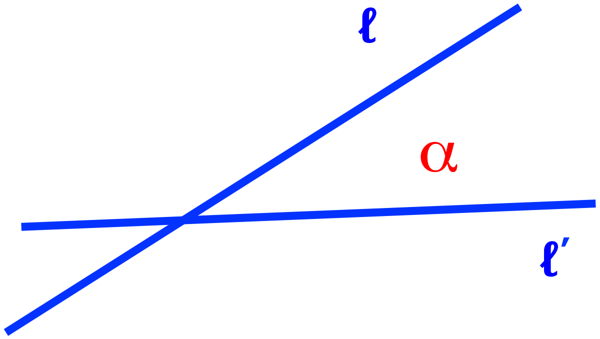


Geometría Plana

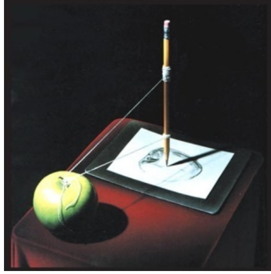
Lo Básico que debe saber

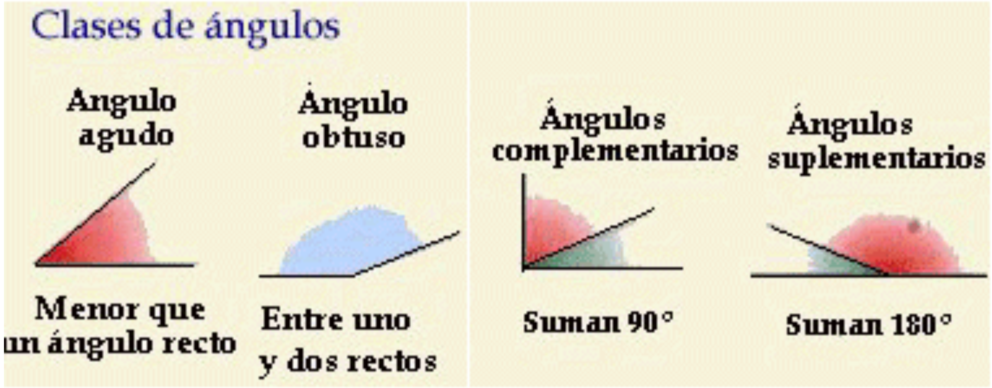
- Igualdad de ángulos
- Triángulos Rectángulos
- Triángulos Semejantes
- Radián
- Arco ≈ Cuerda

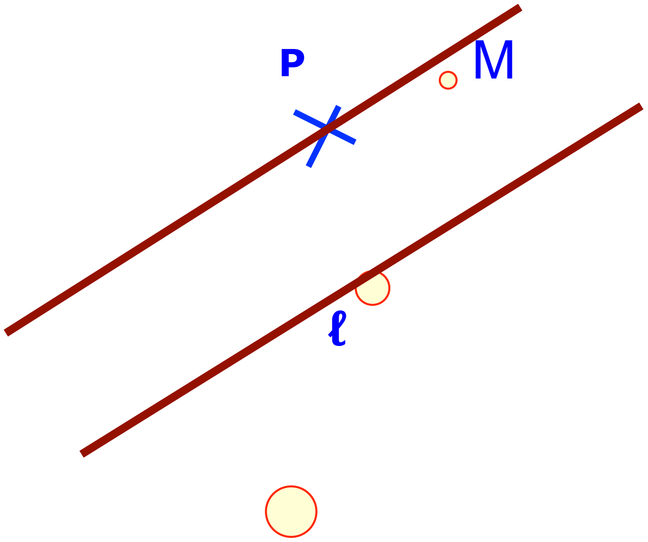




Introducción a la Física Newtoniana







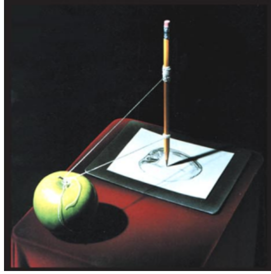
El Postulado de las Paralelas

Dada una línea ℓ y un punto **P**, fuera de la línea **ℓ**, existe una única línea **M** en el mismo plano de **P** y **ℓ** , que pasa por el punto **P** y no intercepta a **ℓ**.

Palabras Claves:

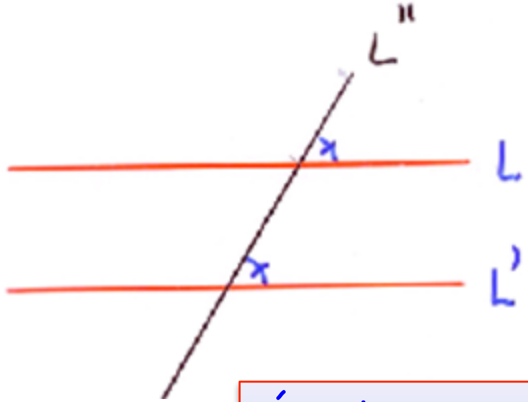
- Que ***existe*** la línea paralela M,
- Que es ***única***

Introducción a la Física Newtoniana



Un Punto → Una Línea → Dos paralelas

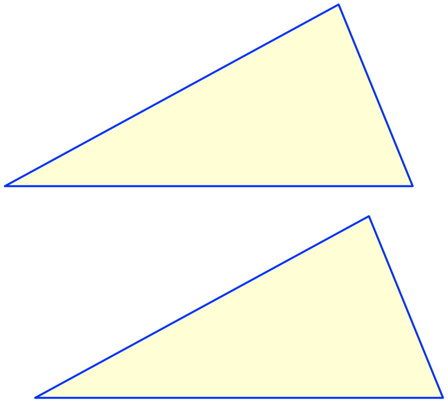
Una recta cualquiera
L″ corta a las dos
paralelas



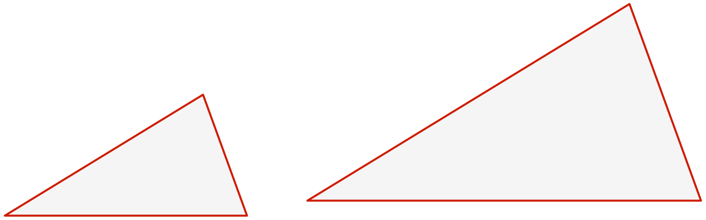
Ángulos correspondientes,
Alternos internos
Complementarios
Suplementarios
Ángulos opuestos por el vértice

Esto se puede demostrar por construcción
o proponerlo como un Postulado

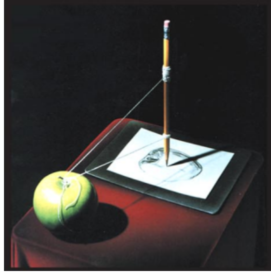
Triángulos Congruentes:
Lados y ángulos respectivos iguales



Triángulos Semejantes:
Ángulos correspondientes
Iguales.



Introducción a la Física Newtoniana



Qué es MEDIR?

Es comparar dos segmentos de una recta. Definimos uno de ellos como unidad.

Así asociamos un número real a cada segmento.

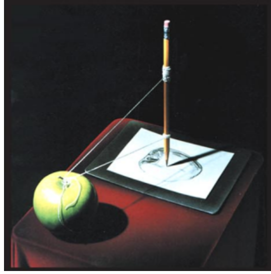
Entonces podemos operar (sumar, restar multipllcar) con los segmentos en forma similar a los números.

Dado dos segmentos, siempre se puede sumarlos a lo largo de una recta común. Sumo los números asociados a cada uno de ellos.

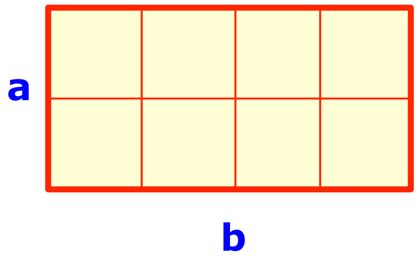
Es posible introducir así en geometría, en forma intuitiva (esto no es una demostración) una aritmética de los segmentos, donde todas las propiedades de los números tienen un equivalente en la geometría de los segmentos.
(Una referencia para este tema es : *Foundations of geometry, David Hilbert.)*

La suma y la resta es intuitiva y directa.
Veamos el producto de dos segmentos: **a** y **b** .

Introducción a la Física Newtoniana

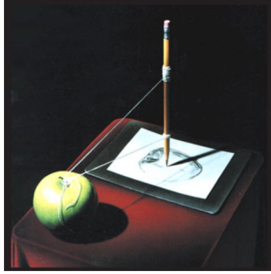


Una forma geométrica conocida es definir el producto como el área:



El producto de los dos segmentos es el número de cuadrados unitarios que tiene, Y lo denominamos el área.

Introducción a la Física Newtoniana



Ejercicio

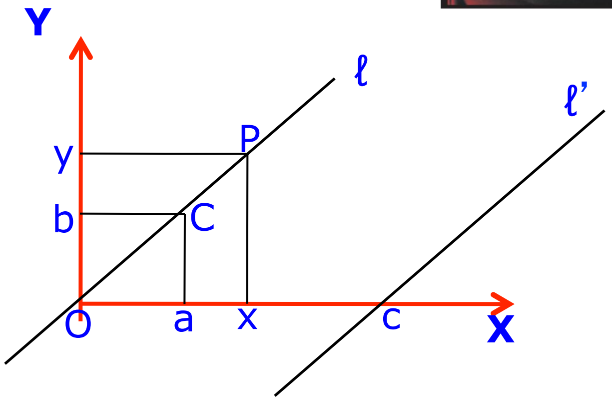
Encontrar la ecuación de una recta en el plano.
(Usaremos la semejanza de triángulos)

Definimos los ejes coordenados X (denominada abcisa) e Y (denominada ordenada) ortogonales.

Recta que pasa por el origen:

Primero trazamos una recta por el origen y dibujamos dos Triángulos semejantes:
(ΔOaC y ΔOxP).

Escribimos las proporcionalidades asociadas a estos triángulos y obtenemos la ecuación de una recta que pasa por el origen.



Para la recta que pasa por el origen tenemos:

$a/b = x/y \Rightarrow$

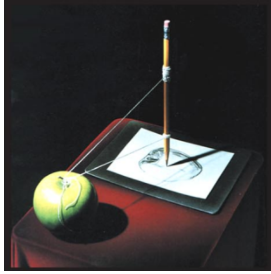
$y = (b/a)\, x.$

Para la recta paralela ℓ'
Tenemos:

$y = (b/a)(x - c) \Rightarrow$

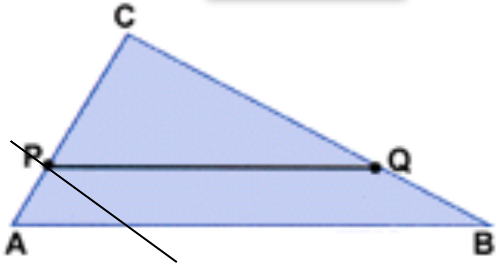
$y = (b/a)\, x - (bc)/a$

Introducción a la Física Newtoniana



Si en un triángulo ABC se traza una recta paralela al lado AB, de tal manera que intersecte al lado AC en el punto P y al lado BC en el punto Q, se obtienen las siguientes proporciones:

Ejercicio

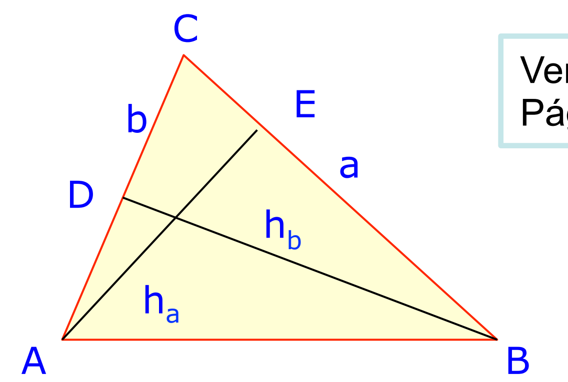


$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}}$$

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QB}}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}$$

Ejercicio



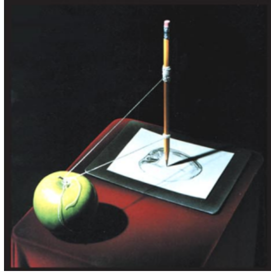
Ver apuntes Pág 11, Cap I

A partir de la Figura y usando el teorema de las proporciones, demuestre que:

$$\boxed{h_a\, a = h_b\, b = h_c\, c}$$

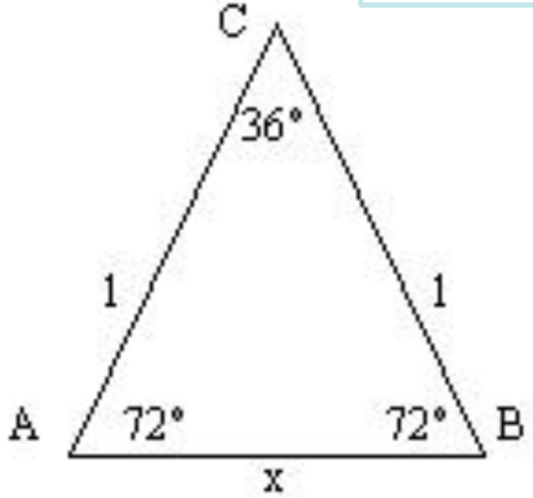
NOTA: Este resultado es una *característica* de cualquier triángulo. Base por Altura correspondiente, da lo mismo qué lado se utiliza. Se denomina el doble del área del triángulo.

Introducción a la Física Newtoniana



Ejercicio

Ver apuntes
Pág 15, Cap I



Considere un triángulo isósceles cuyo ángulo del vértice tiene un valor de 36° , sus lados iguales tienen una longitud unitaria y su base un largo x, cuyo valor desconocemos.

Con estos datos y sólo con ellos, encuentre el Largo de x, sin utilizar el valor de sin36° o 18° o 72° o cualquier otra.

DATOS: Triángulo Isósceles, valores relativos de los ángulos, 36 y 72

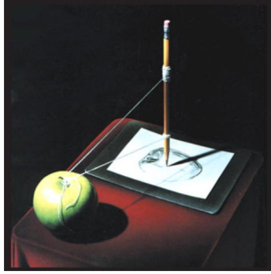
INCÓGNITA: el valor de la base X

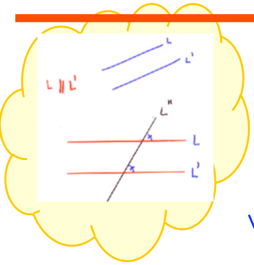
ESTRATEGIA: Necesitamos una ecuación Para una incógnita:X. Al bisectar el ángulo basal de 72, obtenemos dos triángulos semejantes => una ecuación para x.

En base al valor anterior, y sin mirar en tablas o calculadoras, establezca el valor para el seno (o coseno) de 18° . A partir de este resultado encuentre el valor de la función trigonométrica para todos los múltiplos de 18° .
¿Cuántos valores debe encontrar?

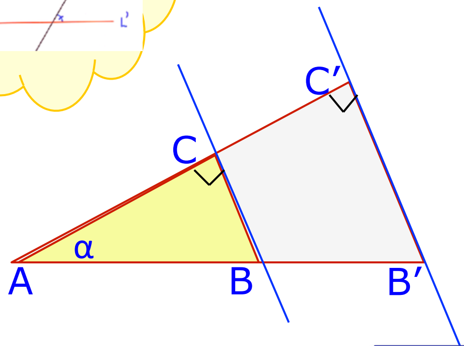
Ver apuntes, Ejemplo
Resuelto, Pág 45, Cap I

Introducción a la Física Newtoniana





La recta BC es paralela a B' C'. Los dos triángulos generados así, son semejantes: tienen sus lados correspondientes *proporcionales*



Δ ABC ~ Δ AB' C'

Triángulos semejantes
Es la idea básica de la
TRIGONOMETRÍA

Dado el trazo AB y el ángulo agudo α, si trazamos una perpendicular desde B a la recta AC', entonces AC queda únicamente determinado.

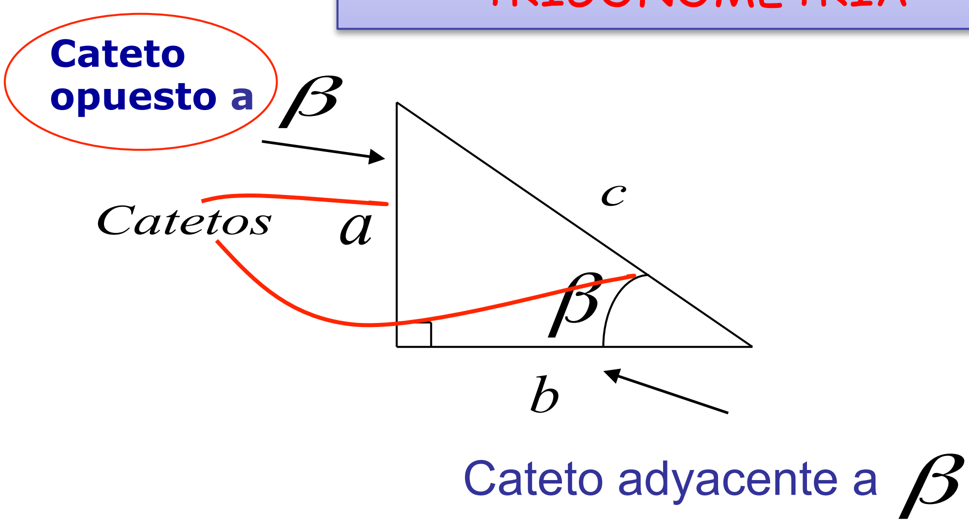
Con esto también queda determinado el trazo BC.

Definimos estas relaciones:

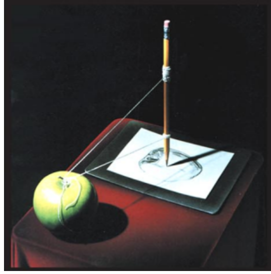
$$AC = AB \cos(\alpha)$$

$$BC = AB \operatorname{sen}(\alpha)$$

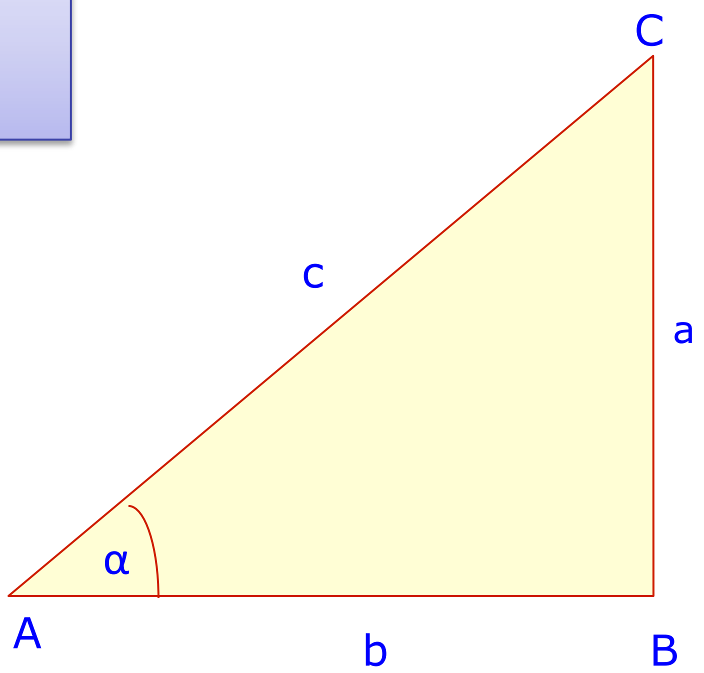
$$BC/AC = \tan(\alpha)$$



Introducción a la Física Newtoniana



Triángulos semejantes
Es la idea básica de la TRIGONOMETRÍA

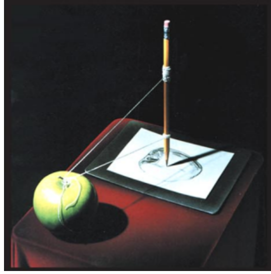


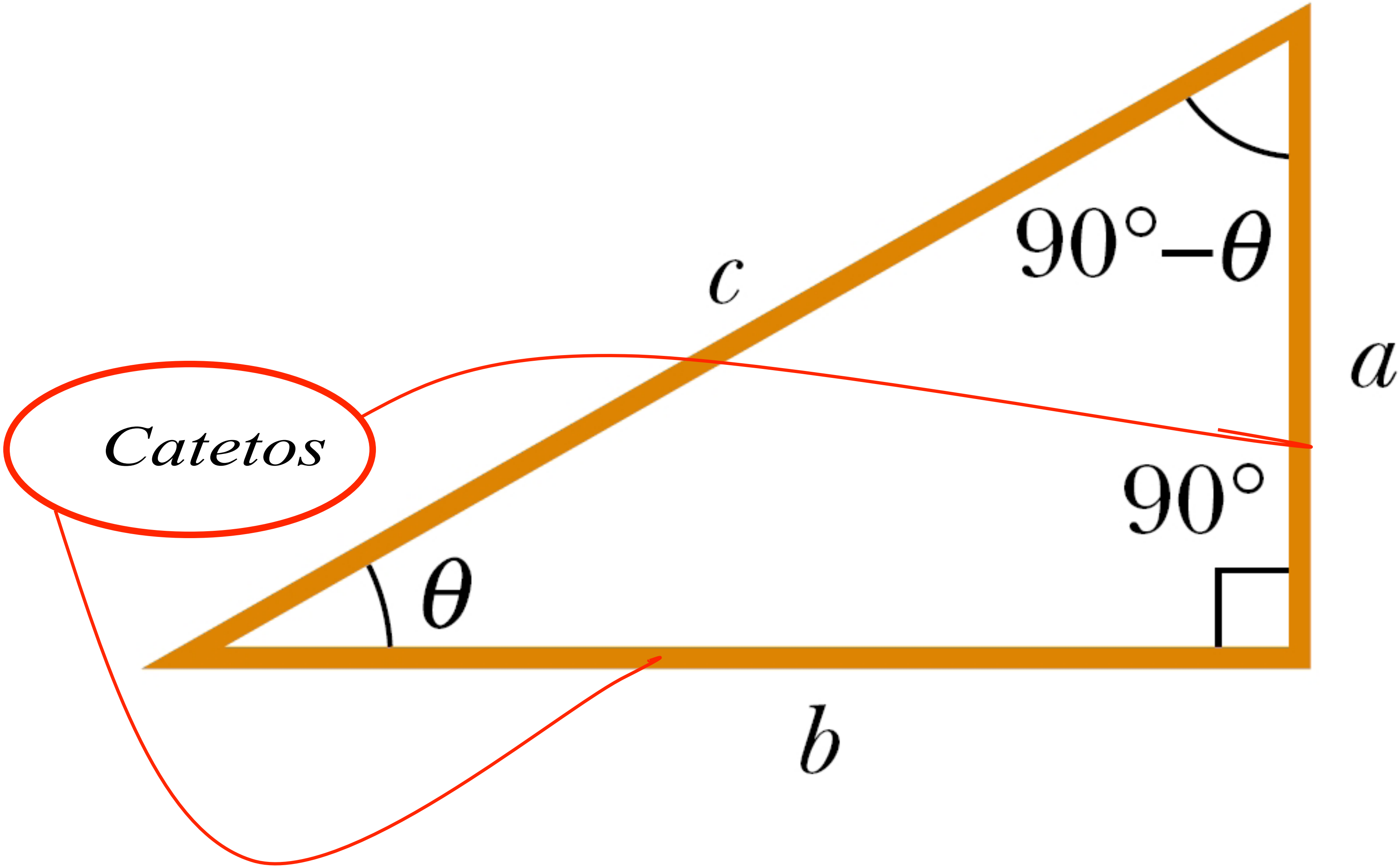
$$sen(\alpha) = \frac{CB}{AC} = \frac{a}{c} = \frac{cateto-opuesto}{hipotenusa}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} = \frac{b}{c} = \frac{cateto-adyacente}{hipotenusa}$$

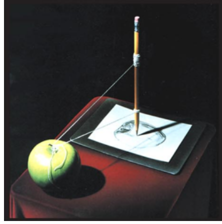
$$\tan(\alpha) = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{b} = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{cateto-opuesto}{cateto-adyacente}$$

Introducción a la Física Newtoniana

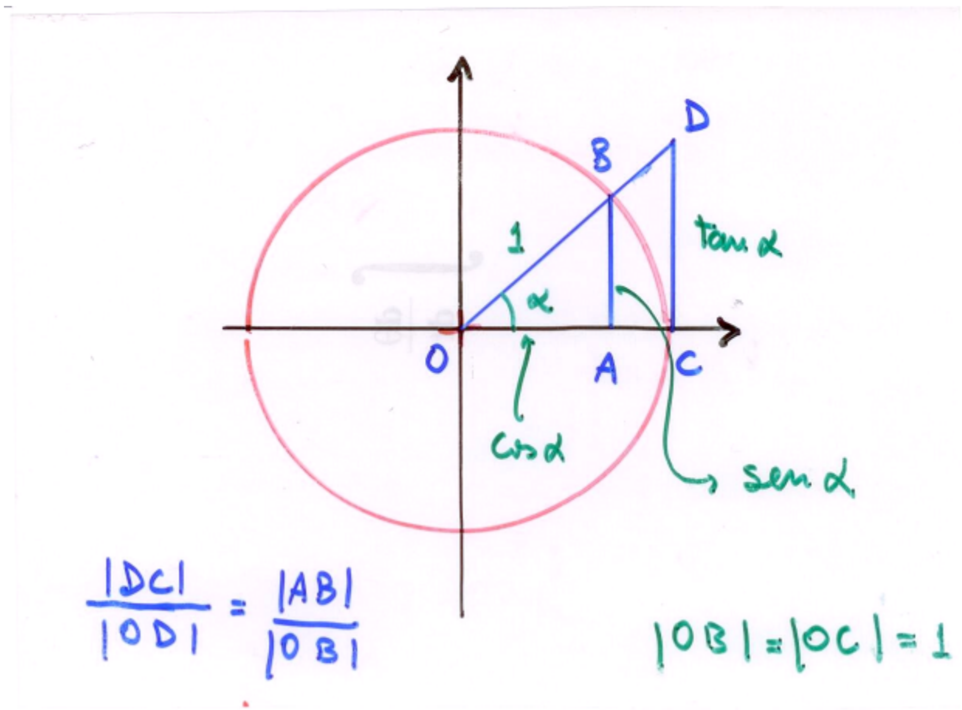




Introducción a la Física Newtoniana



La relevancia del círculo de radio unidad



Como la proporcionalidad estudiada para los triángulos rectángulos es válida para todos ellos, independiente de su tamaño, nos concentramos en los *triángulos cuya hipotenusa es unitaria.*

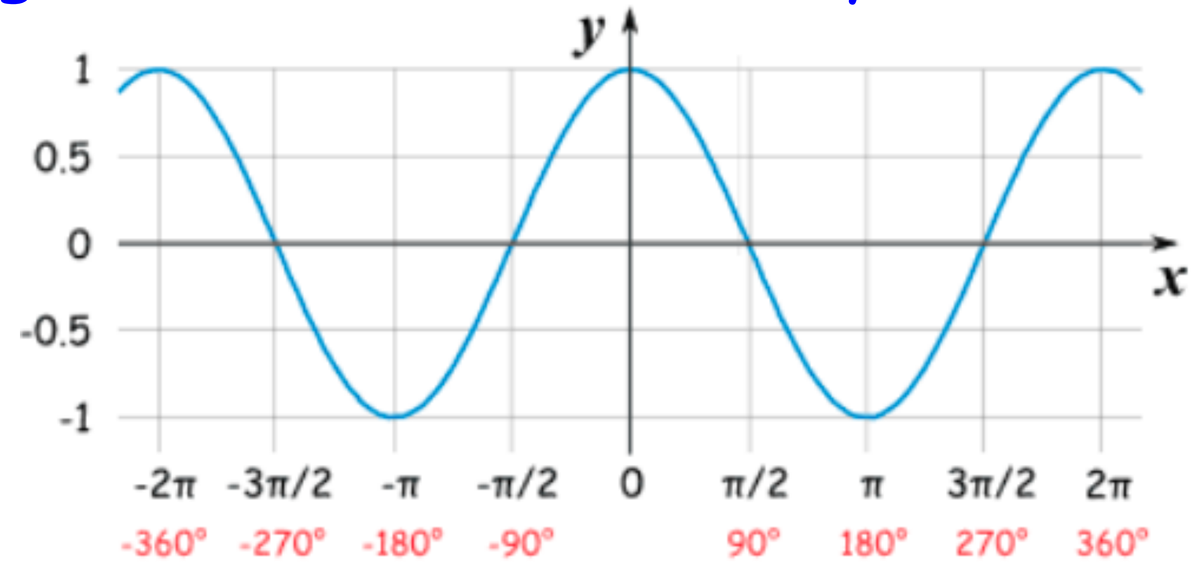
La relación para cualquier otro triángulo semejante será la misma.

Esta es la razón por la cual nos concentramos en el círculo unitario.

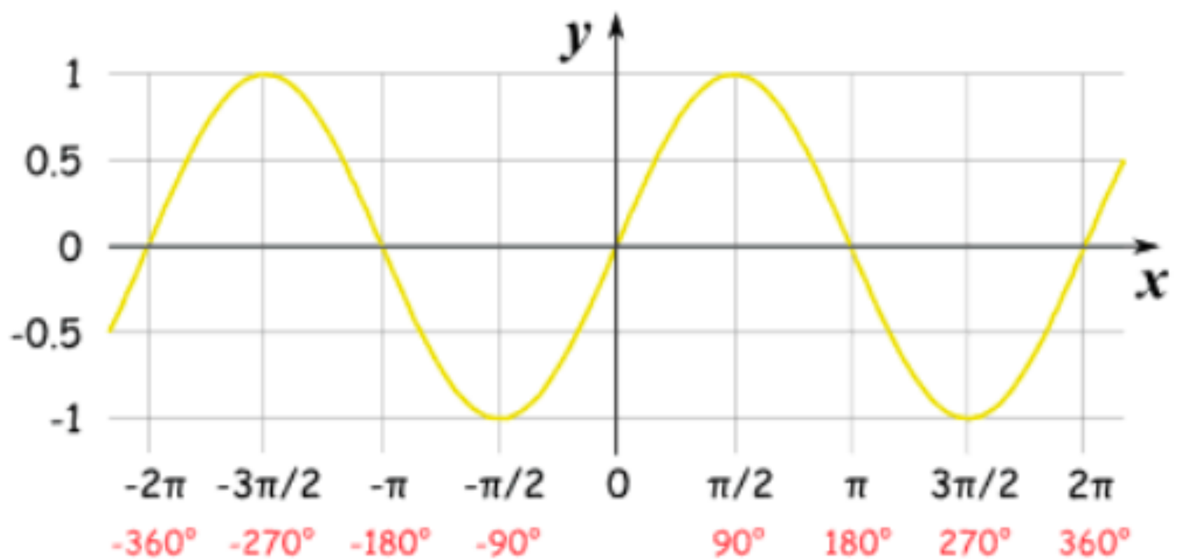
Introducción a la Física Newtoniana

Otra forma de graficar la función seno y coseno.

Y = cos (x)



Y = sen (x)



Introducción a la Física Newtoniana

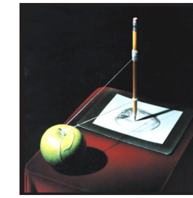
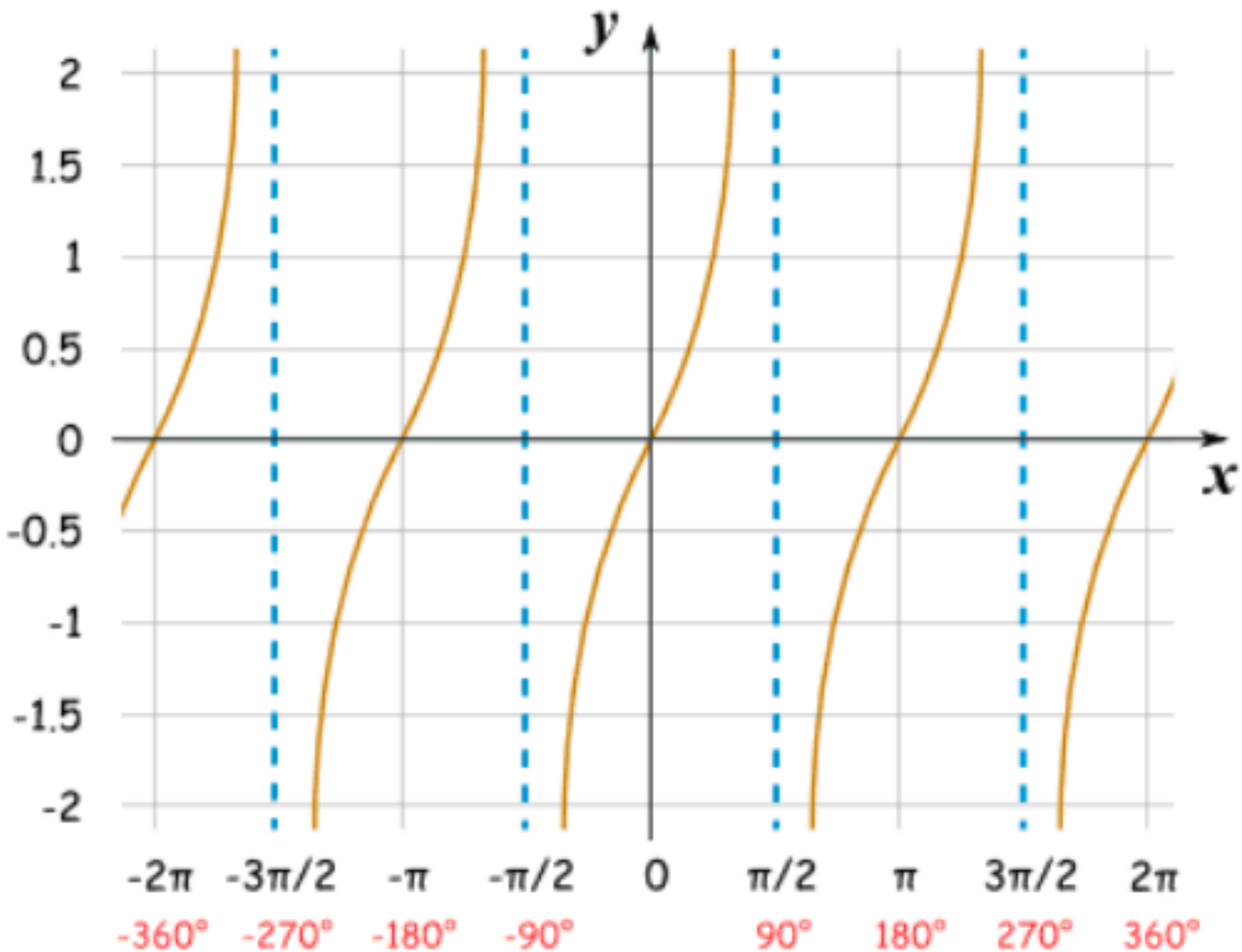


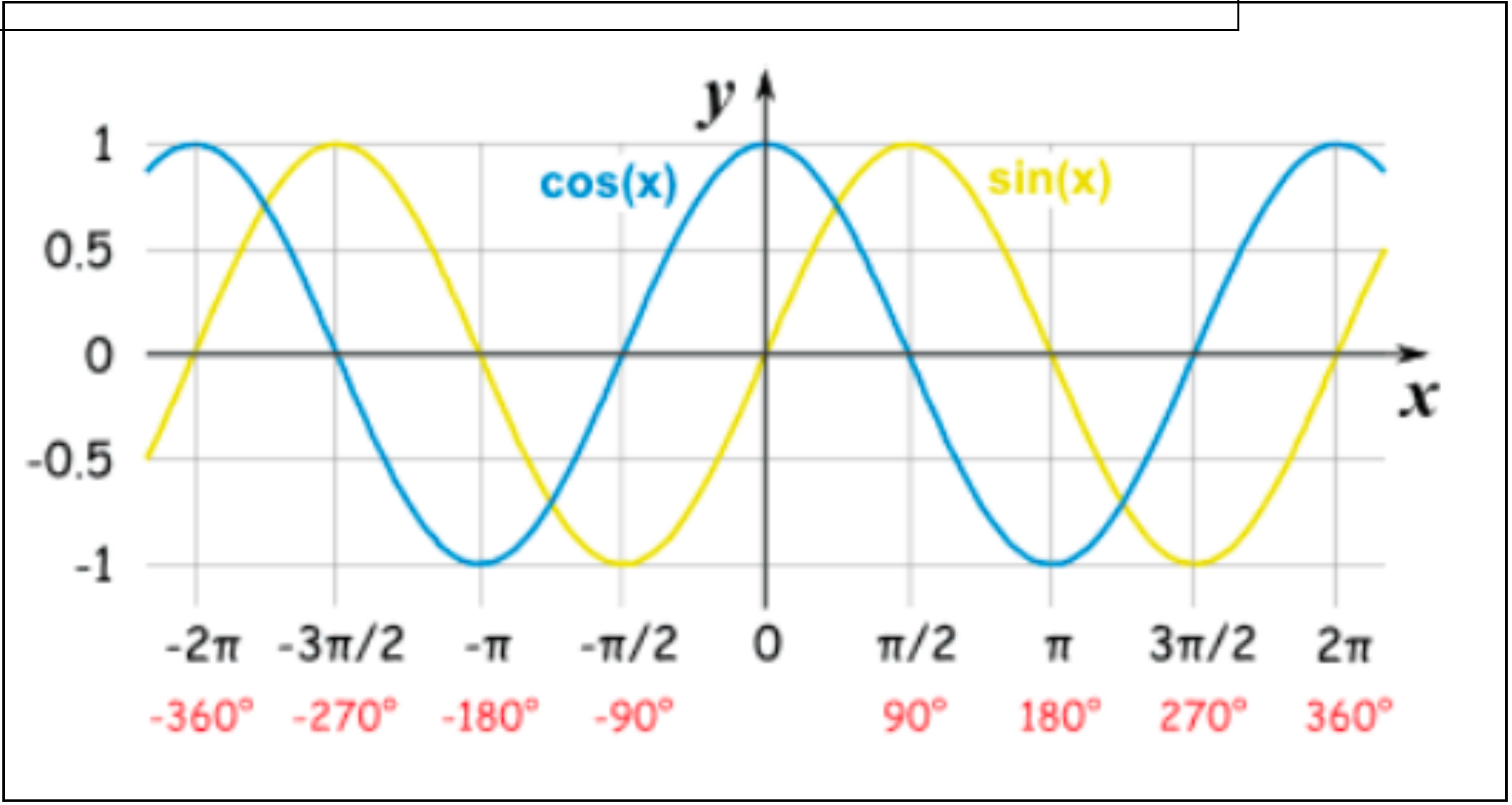
Gráfico de la función
tangente

$y = \tan(x)$

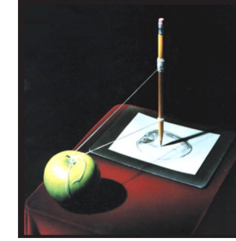


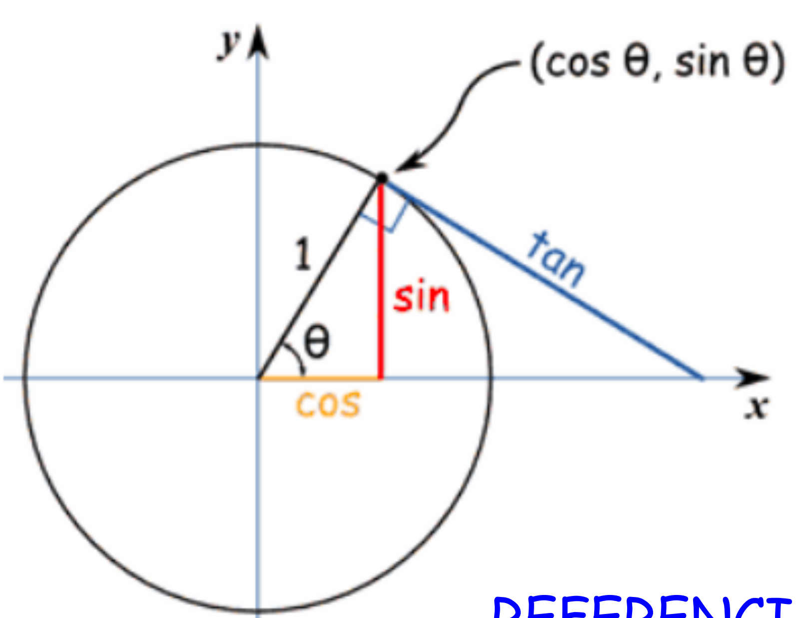
Introducción a la Física Newtoniana

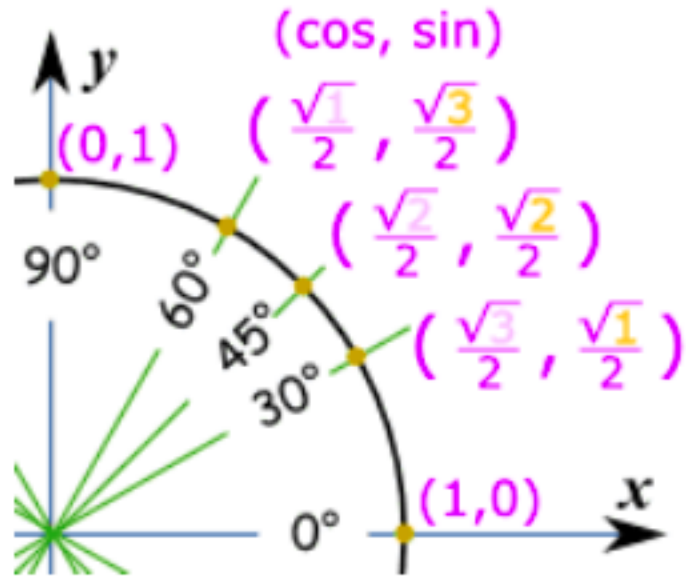
Comparación entre los gráficos de sen(x) y cos(x).
Son iguales salvo el desfase (o corrimiento) de la función sen(x) con respecto a la función cos(x).
(o al inverso, el cos c/r al sen)



Introducción a la Física Newtoniana







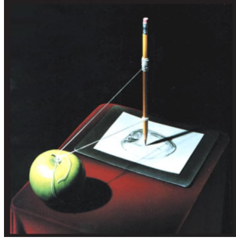
REFERENCIAS:

https://www.mathsisfun.com/geometry/unit-circle.html

https://www.mathsisfun.com/algebra/trig-sin-cos-tan-graphs.html

https://www.khanacademy.org/math/trigonometry/unit-circle-trig-func/graphs-of-sine-cosine-tangent/v/we-graph-domain-and-range-of-sine-function

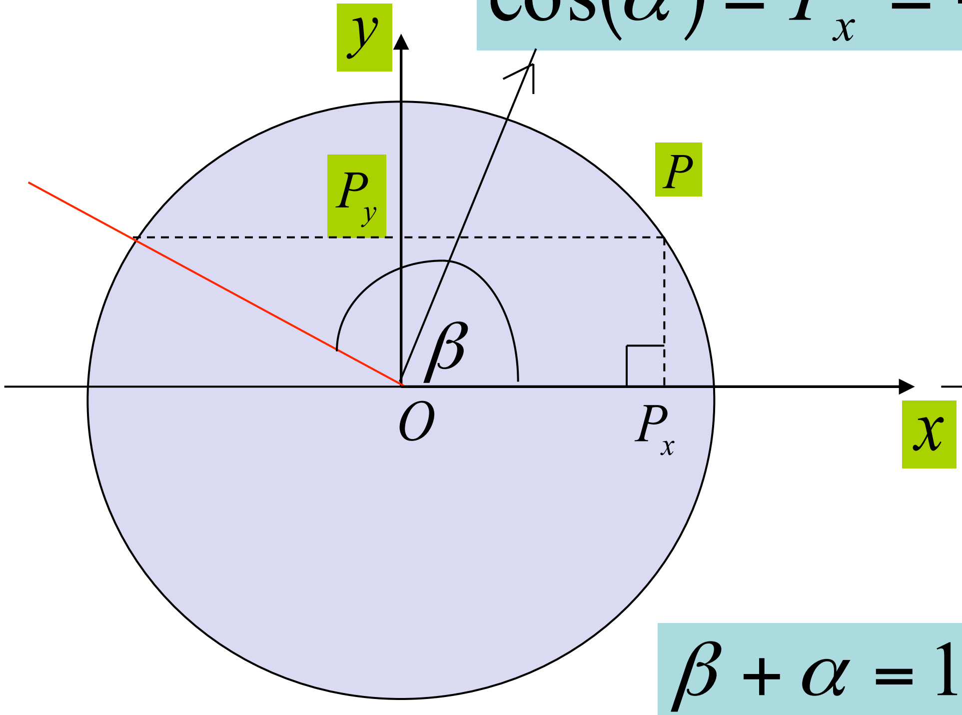
Introducción a la Física Newtoniana

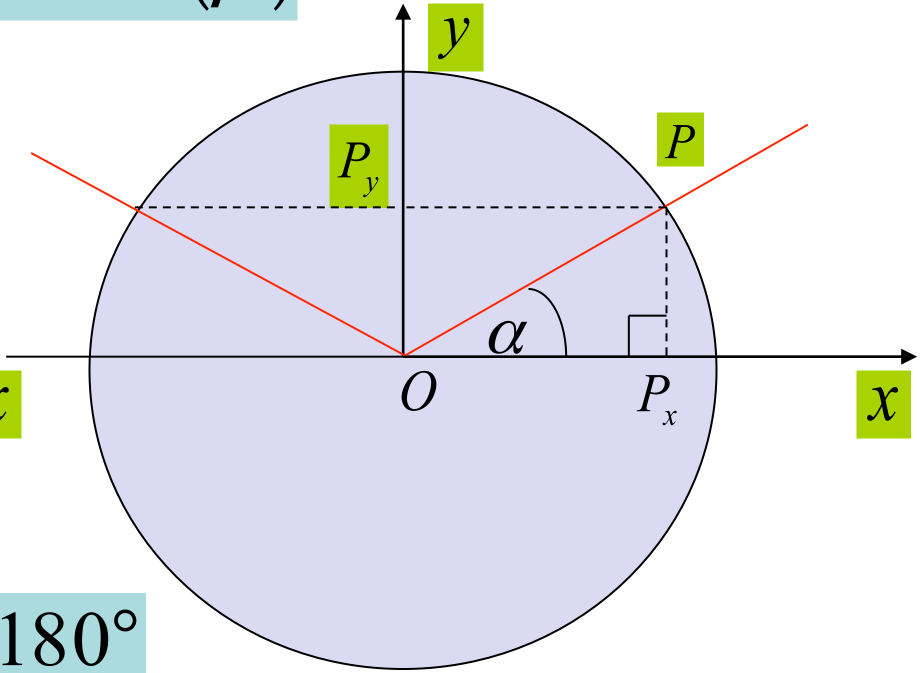


¿Qué relación existe entre los ángulos de los dibujos?

$$sen(\alpha) = P_y = sen(\beta)$$

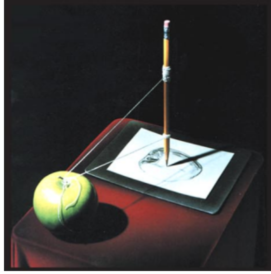
$$\cos(\alpha) = P_x = -\cos(\beta)$$





$$\beta + \alpha = 180°$$

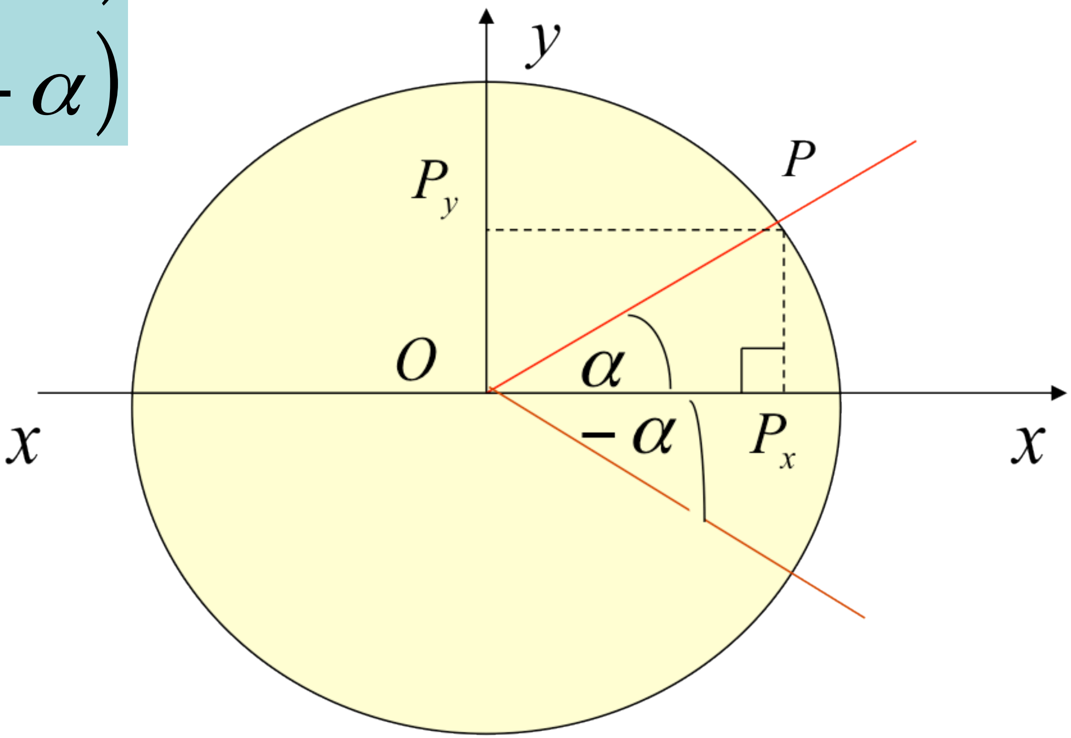
Introducción a la Física Newtoniana



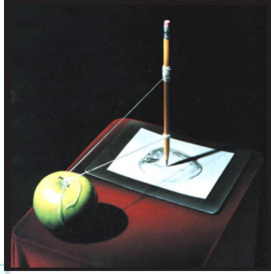
¿Cómo cambian estas funciones al cambiar el sentido del ángulo?

$$sen(\alpha)\ ???\ sen(-\alpha)$$

$$\cos(\alpha)\ ???\ \cos(-\alpha)$$



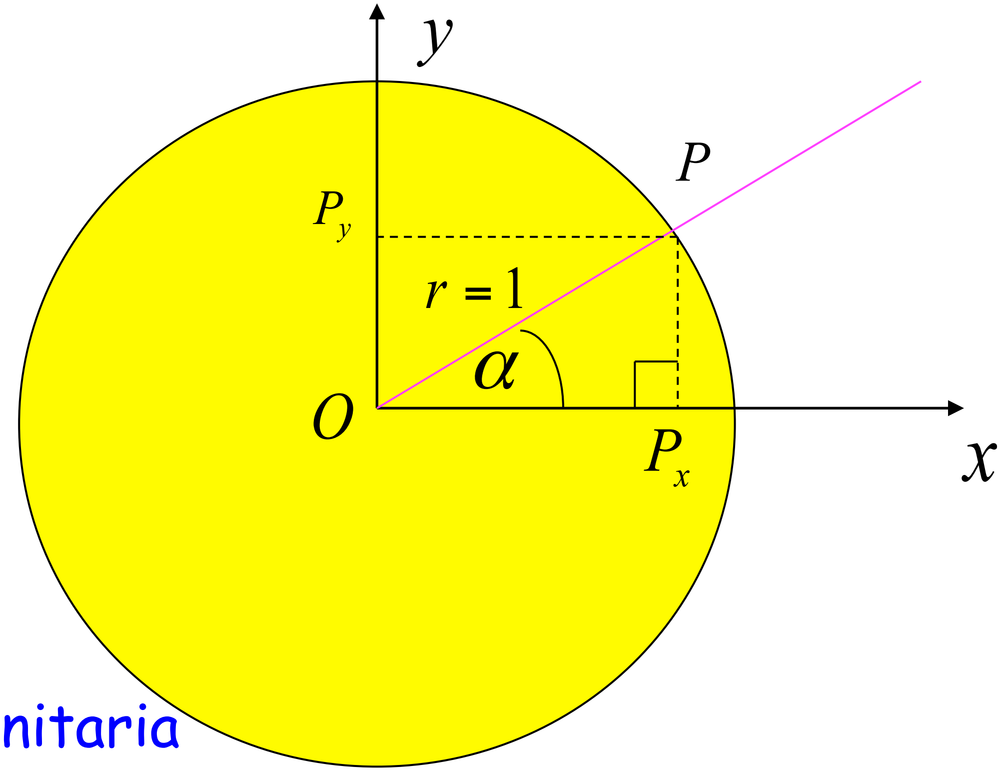
Introducción a la Física Newtoniana



Relaciones trigonométricas importantes

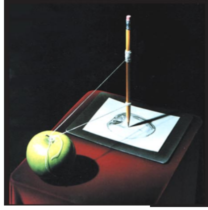
$$sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

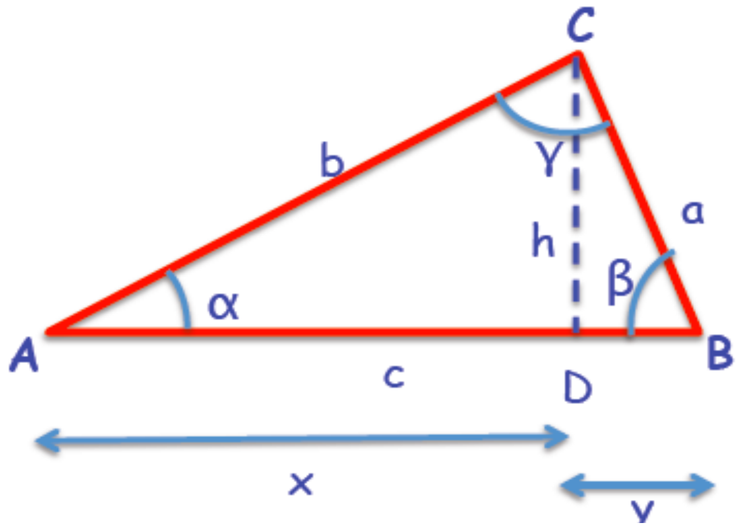


Circunferencia unitaria

Introducción a la Física Newtoniana



Teorema de Coseno



Análogamente, usando las otras alturas como referencia, se obtiene:

$$b^2 - 2ba \cdot \cos\beta + a^2 = c^2$$

$$b^2 - 2cb \cdot \cos\beta + c^2 = a^2$$

$$X^2 + h^2 = b^2$$
$$y^2 + h^2 = a^2$$

Restando las ecuaciones obtenemos:

$X^2 - y^2 = b^2 - a^2$, o
$(x - y)(x + y) = b^2 - a^2$,

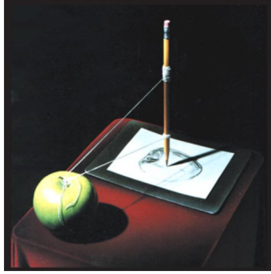
de la figura, tenemos

$(c - 2y)c = b^2 - a^2$,
ordenando:
$c^2 - 2cy + a^2 = b^2$,

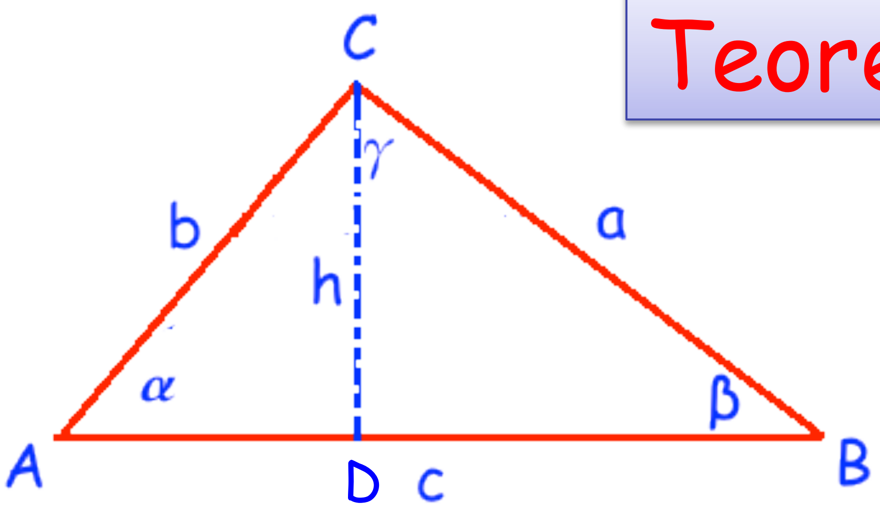
como: $y = a \cos\beta$,

$$c^2 - 2ca \cdot \cos\beta + a^2 = b^2$$

Introducción a la Física Newtoniana



Teorema del Seno



Trazamos la altura h , la línea |CD|.
Observamos que por definición:

$$\frac{h}{b} = sen\alpha, \qquad \frac{h}{a} = sen\beta$$

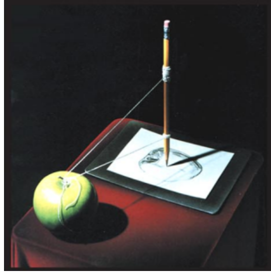
De estas dos ecuaciones despejamos h

$b \text{ sen}\,\alpha = a\ sen\beta$ Ordenando

$$\boxed{\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}}$$

Donde la última ecuación se obtiene al repetir esta acción utilizando la altura que parte del vértice C.

Introducción a la Física Newtoniana



Triángulos semejantes tienen todos los ángulos respectivamente iguales y todos sus lados son proporcionales con el misma factor de proporcionalidad.

Ejemplo:

Calcule $$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{?}{?}$$

Exprese su resultado como una razón Entre otros lados del triángulo.

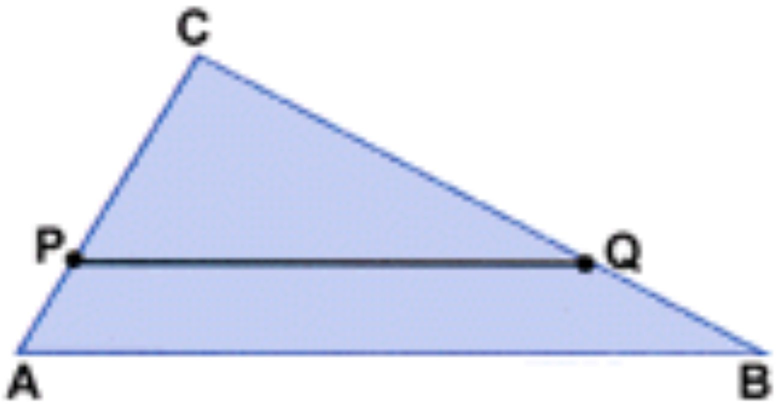
Solución:

Usando el teorema del seno, se tiene

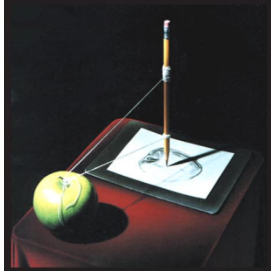
$$\frac{\overline{CQ}}{sen\,\alpha} = \frac{\overline{PQ}}{sen\,\gamma} \quad en \quad el \quad \Delta PQC.$$

$$También: \quad \frac{\overline{CB}}{sen\,\alpha} = \frac{\overline{AB}}{sen\,\gamma}$$

Ud. termine la demostración...

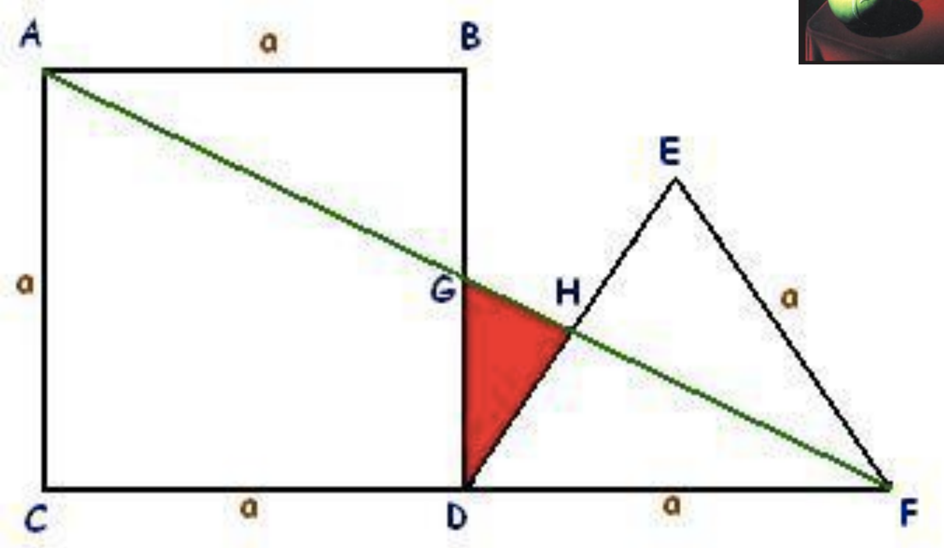


Introducción a la Física Newtoniana



PRACTICO 0

Se tiene el cuadrado ABCD de la figura junto con un triángulo equilátero DEF, ambos de lado a. Se traza la diagonal AF, calcule el área del triángulo GDH.



Datos: Cuadrados de lado a, Triángulo equilátero de lado a , D es el punto medio de |CF|

Incógnitas: Area del triángulo △DGH, o mejor: la altura del vértice H

Estrategia: Calcular el valor de los ángulos del triángulo DGH, recordando que DG=a/2 y a partir de la altura del vértice H, usar el Teorema del seno.

Introducción a la Física Newtoniana