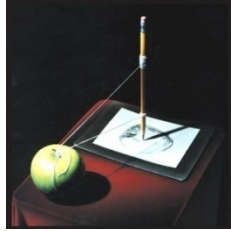


Introducción a la Física Newtoniana

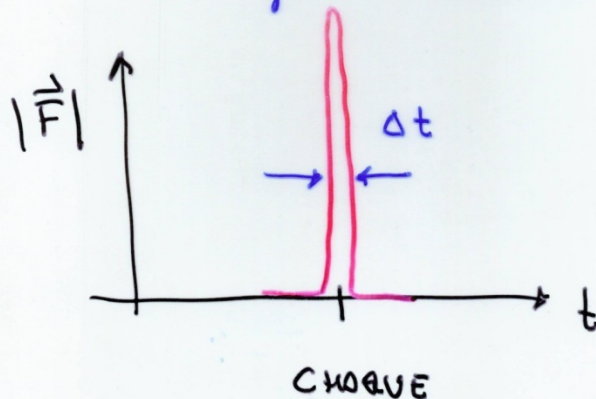


CHOQUES BINARIOS

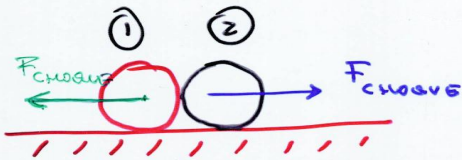
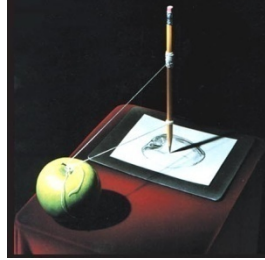
Def.: Fza. de Contacto

En qué se distingue de las
fzas. anteriores:

- Actúa por un tiempo
CORTO pero con
gran Intensidad



Introducción a la Física Newtoniana



Por la 3^{era} ley de Newton
Durante el choque, se cumple
Acción = Reacción

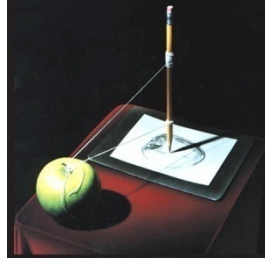
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

y se ejercen sobre la esfera 1
y la esfera 2.

⇒ El momento total del
sistema durante el choque
se CONSERVA.

VÁLIDO SIEMPRE

Introducción a la Física Newtoniana



MODELO

- Suponemos que durante el choque, los cuerpos NO cambian de posición

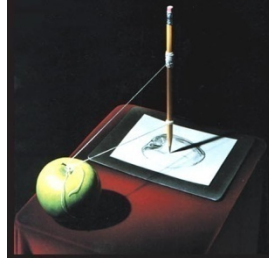
$$\Delta t \ll 1$$

- La velocidad de los cuerpos varía abruptamente

$$v_i|_{0-} \neq v_i|_{0+}$$

- Como no cambia la posición, la En. Potencial No cambia.

Introducción a la Física Newtoniana



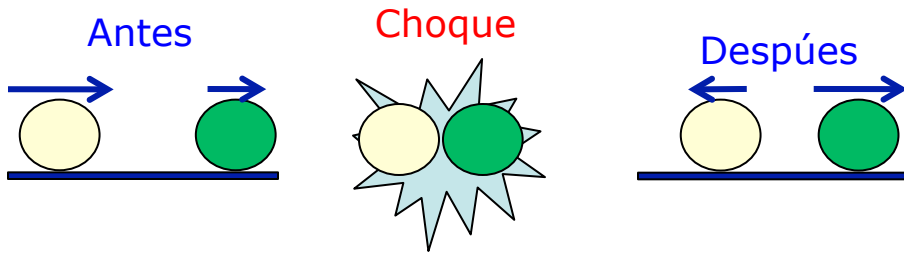
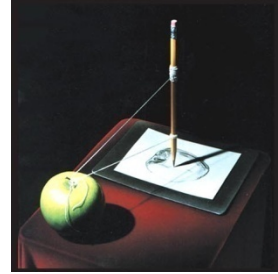
- Como la velocidad cambia, la Energía Cinética del sistema puede ser distinta inmediatamente después del choque, o puede **NO VARIAR**.

Debe ser especificado en el problema.

Siempre existe transferencia de energía mecánica a otras formas de energía: calórica, vibraciones de los objetos, ondas de sonido...

El punto es si este porcentaje de transformación merece ser considerado o no...

Introducción a la Física Newtoniana



Por definición de choque elástico, se conservan dos leyes:

- Conservación del Momentum,
- Conservación de la Energía Cinética.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

Ordenando estas dos ecuaciones

$$m_1 (v_1 - v'_1) = -m_2 (v_2 - v'_2)$$

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - v'^2_1) = \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - v'^2_2)$$

$$\Rightarrow v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2$$

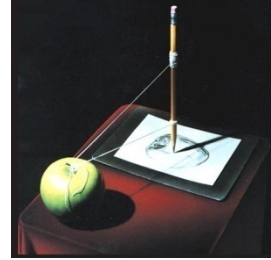
$$v_1 - v_2 = -v'_1 + v'_2 = -(v'_1 - v'_2)$$

Válido para choques elásticos

$$V = v_{1/Lab} - v_{2/Lab} = v_{1/Lab} + v_{Lab/2} = v_{1/2}$$

Definición de velocidad relativa

Introducción a la Física Newtoniana



$$v'_1 = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1)$$

$$v'_2 = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

$$v'_1 = v_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{rel}$$

○

$$v'_2 = v_{CM} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{rel}$$

○

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = (m_1 + m_2) v_{CM} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

○

Esta es la definición de la
Velocidad del centro de masa

v_{CM}

Válida siempre.

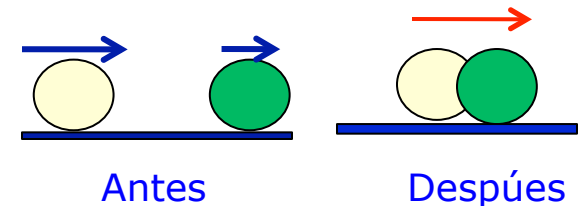
CHOQUES INELÁSTICOS

Si la energía **no** se conserva,

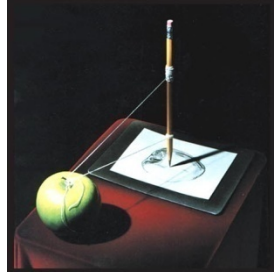
$$|v'_1 - v'_2| = e |v_1 - v_2|$$

$e = 1$ choque elástico,

$e = 0$ choque totalmente inelástico,
no se conserva la energía
ambos cuerpos
permanecen unidos
después del choque.



Introducción a la Física Newtoniana



Esta expresión se puede escribir más simple aún

$$v'_1 = v_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1) + \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

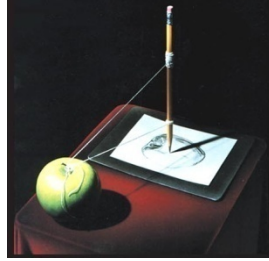
reordenando,

$$v'_1 = v_{CM} + \frac{m_2 v_2 + m_1 v_1}{m_1 + m_2} - \frac{(m_1 + m_2) v_1}{m_1 + m_2}$$

$$v'_1 = 2 v_{CM} - v_1 \quad \longrightarrow \quad v_{CM} = \frac{1}{2}(v_1 + v'_1)$$

$$\text{Análogamente} \quad v_{CM} = \frac{1}{2}(v_2 + v'_2)$$

Introducción a la Física Newtoniana



Relevancia del Centro de Masa (CM)

El Centro de Masa es un punto matemático, no necesariamente coincide con un punto que pertenece al o a los objetos que estamos estudiando. Esto se ve claramente en los choques elásticos.

El centro de masa destaca la importancia que posee la elección de un *sistema de referencia* cuando estudiamos choques binarios, en particular, choques elásticos.

Esto se aprecia claramente en los dos últimos resultados de la página anterior:

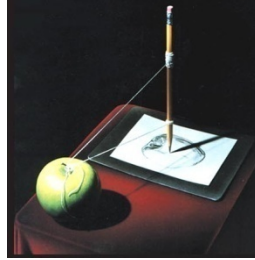
$$v_{CM} = \frac{1}{2}(v_1 + v'_1)$$

y

$$v_{CM} = \frac{1}{2}(v_2 + v'_2)$$

Si nos ubicamos en el CM, entonces $V_{CM} = 0$. El valor de las velocidades inmediatamente después del choque es igual a la velocidad incidente pero en sentido opuesto al original. Esto es válido para ambos objetos.

Introducción a la Física Newtoniana



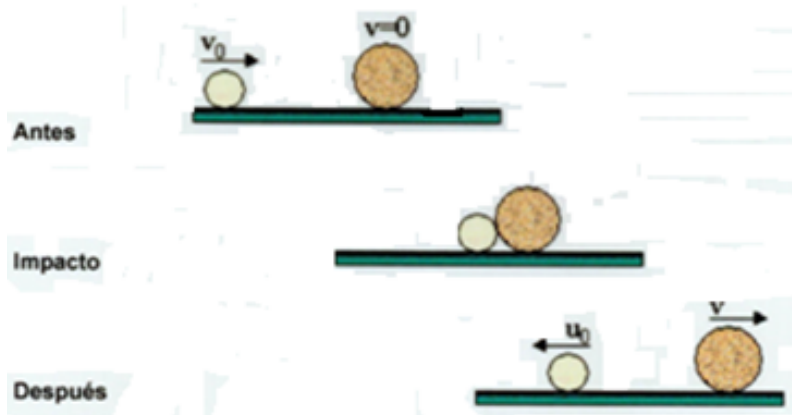
CHOQUE ELÁSTICO

[El momentum y la energía se conservan]

Dos esferas de masa m y M , perfectamente elásticas, chocan. Una de ellas estaba inicialmente en reposo y la otra se aproxima con velocidad constante V_o . Después del choque, una de ellas sale con velocidad u_o y la que estaba en reposo se desplaza con velocidad V .

$$\begin{aligned} \rightarrow mv_o &= mu_o + Mv \leftarrow \\ \rightarrow \frac{1}{2}mv_o^2 &= \frac{1}{2}mu_o^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \end{aligned}$$

$$u_o = -\frac{M-m}{m+M}V_o, \quad V = \frac{2m}{m+M}V_o$$



Veamos un par de casos particulares y simples:

Dos masas iguales $M=m$

Del resultado de la última línea, tenemos

$u_o = 0$, $V = V_o$, como era de esperar. El CM

$V_{CM} = \frac{1}{2}V_o$ Cada partícula se aproxima

Con rapidez $V_o/2$, en este sistema de referencia.

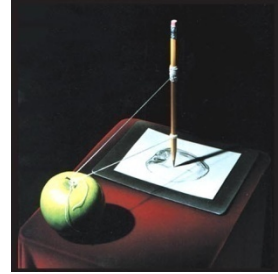
Si $M \gg m$: $u_o = -V_o$, $V \approx \frac{2m}{M}V_o$

la masa pequeña retrocede con la misma rapidez con la cual se acercaba y la masa M avanza muy lentamente. La velocidad del CM es

$$V_{CM} = \frac{m}{m+M}V_o \approx \frac{m}{M}V_o$$

El CM se mueve lentamente, dominado por la masa mayor.

Introducción a la Física Newtoniana



CHOQUE TOTALMENTE INELÁSTICO [Sólo se conserva el momentum]

La conservación del momentum es una consecuencia directa de la validez de las leyes de Newton.

EJEMPLO: CHOQUE ENTRE DOS CARROS DE UN TREN

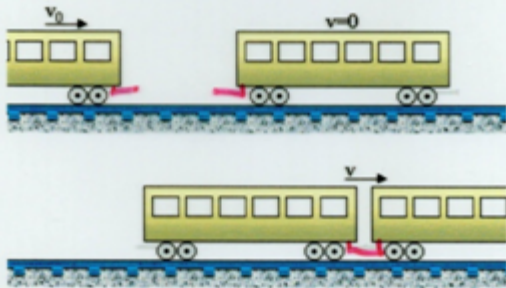
Antes del choque:

Uno de los carros permanece en reposo y el otro se acerca con velocidad V_o .

Después del choque:

Ambos viajan unidos. Tienen la misma velocidad.

Se puede verificar, después de utilizar la conservación del momentum para determinar la velocidad resultante del sistema V , que la energía cinética después del choque es menor que la inicial.



$e = 0$ choque totalmente inelástico,

Como $e=0$, la velocidad relativa después del choque es nula, ambos viajan juntos.

De esta forma la única ecuación a resolver es la del momento que es

$$mV_o = (m + M)V \Rightarrow V = \frac{m}{m + M} V_o$$

Podemos calcular la energía que se perdió en este Choque inelástico:

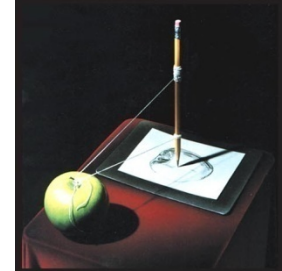
$$\frac{1}{2} m V_o^2 = \text{Energía Inicial}$$

$$\frac{1}{2} (m + M)V^2 = \text{Energía Final}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m M}{m + M} V_o^2$$

Si M tiende a infinito, la pérdida de energía es igual a la energía inicial. Es máxima.

Introducción a la Física Newtoniana



Ejercicio (The Physics Teacher, Vol. 35, Nov 1997)

Un cuerpo de masa M permanece en un plano horizontal. Esta superficie es rugosa y la caracterizamos por un coeficiente de fricción cinética μ .

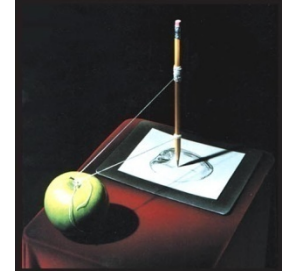
Si esta masa M se divide violentamente en dos fragmentos que caracterizamos por m y $M - m$.

Los dos fragmentos resbalan en la misma dirección pero en sentidos opuestos, obviamente alejándose del punto de la explosión.

La explosión libera una energía E .

- Calcule el valor de la velocidad del centro de masa inmediatamente después del choque y t segundos después del choque
- Calcule en qué instante el momentum del centro de masa es máximo. Expréselo en función de la Energía E y la razón entre las masas, $\lambda \equiv \frac{M-m}{M}$.
- Demuestre que la razón entre las distancias recorridas por cada una de las masas $\frac{d_1}{d_2} = \lambda^2$
- Utilizando el resultado obtenido para el valor máximo del momentum del centro de masa (parte b), calcule para qué valor de λ el momentum alcanza su máximo valor.

Introducción a la Física Newtoniana



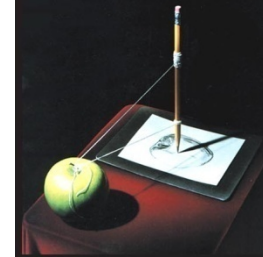
Tres Ejemplos: viscosidad del aire, choque-resorte, choque-polea

Conservación de la energía

Choque Inelástico

Despegue de la masa

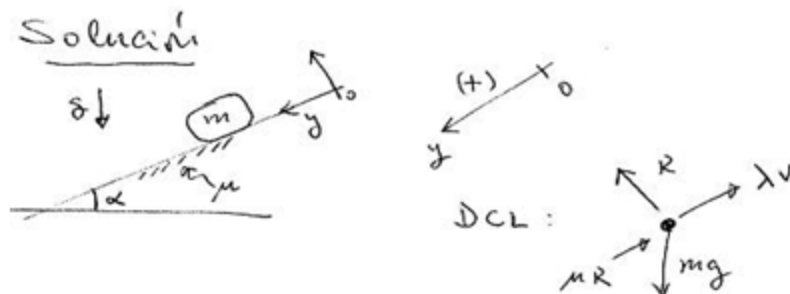
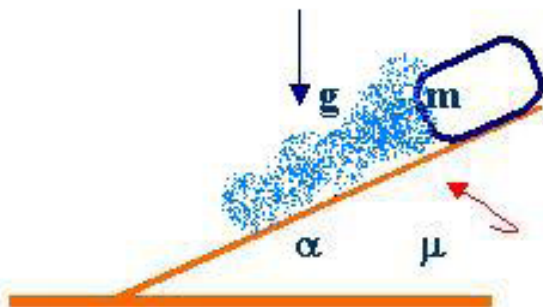
Introducción a la Física Newtoniana



Un bloque de masa m desliza, partiendo del reposo, sobre un plano inclinado -caracterizado por un ángulo α - y con un coeficiente de roce cinético μ .

En este caso, la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del bloque: $\vec{F} = -\lambda \vec{V}$.

encuentre la energía cinética máxima que logra alcanzar el bloque en su deslizamiento.



En la dirección positiva del eje y , se tiene

$$ma = -\lambda v \rightarrow \mu R + mg \sin \alpha$$

En la dirección perpendicular al plano:

$$R - mg \cos \alpha = 0$$

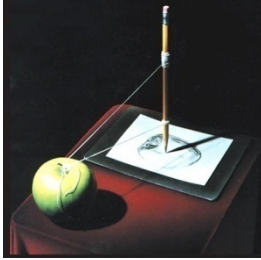
Por tanto

$$ma = -\lambda v + mg (\overset{\text{sen} \alpha}{\cancel{\sin \alpha}} - \mu \cos \alpha)$$

$$ma = -\lambda v + mg \cos \alpha (\tan \alpha - \mu)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\left(\frac{\lambda}{m}\right)v + g \cos \alpha (\tan \alpha - \mu)$$

Suponemos $\tan \alpha > \mu$



Introducción a la Física Newtoniana

Cuando $V = 0$ $\frac{dV}{dt}$ aumenta a una razón ²

$g \cos \alpha (\tan \alpha - \mu)$, V entonces es diferente de cero,

por tanto $\frac{dV}{dt}$ aumenta, pero más lentamente.

y así sucesivamente, V aumenta, entonces

$\frac{dV}{dt}$ aumenta pero cada vez lo hace en menor

cantidad hasta que la velocidad alcanza
un valor crítico

$$\lambda V_* = mg \cos \alpha (\tan \alpha - \mu)$$

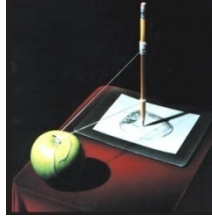
Como $\frac{dV}{dt} = 0$ para $V = V_*$, entonces perma-

nace con el mismo valor.

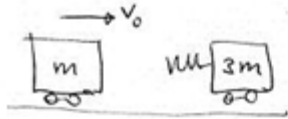
La energía cinética máxima alcanzada si

$$K = \frac{1}{2} m V_*^2 = \frac{1}{2} m^2 g^2 \cos^2 \alpha (\tan \alpha - \mu)^2$$

Introducción a la Física Newtoniana



Ejemplo propuesto en los apuntes



a. En el instante de máxima compresión, la velocidad de ambos carros es la misma.

¿Por qué? Unos segundos antes, el resorte aún está comprimiéndose. Unos segundos después de la máxima compresión, se está expandiendo. Por ende, en el instante de máxima compresión tiene velocidad relativa nula, luego ambos carros se mueven con igual velocidad.

Como el momentum se conserva si no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema,

entonces

$$P_i = P_f$$

$$m v_0 = (m + 3m) v_{cm}$$

$$v_{cm} = \frac{1}{4} v_0.$$

b. No. El momentum se conserva durante este choque.

$$c. \quad m v_0 = m v_1 + 3m v_2 \quad : \text{Conservación del momento}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{3m}{2} v_2^2 \quad : \text{Conservación de la Energía.}$$

$$\left. \begin{aligned} v_0 - v_1 &= 3 v_2 \\ v_0^2 - v_1^2 &= 3 v_2^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v_0 - v_1 &= 3 v_2 \quad (1) \\ 3 v_2 (v_0 + v_1) &= 3 v_2^2 \\ v_0 + v_1 &= v_2 \quad (2) \end{aligned}$$

De la ecuación (1) y (2) obtenemos

$$2 v_0 = 4 v_2 \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{1}{2} v_0}$$

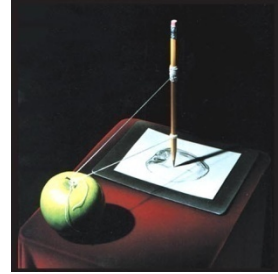
$$2 v_1 = v_2 - 3 v_2 = -2 v_2 = -v_0$$

$$\boxed{v_1 = -\frac{1}{2} v_0}$$

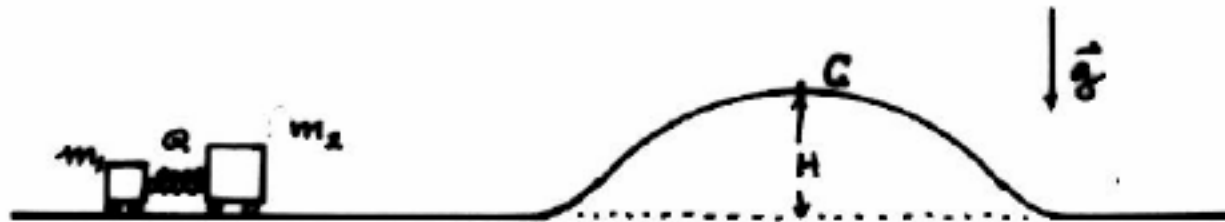
$$\begin{aligned} \text{Comprobar la Ec. de la energía: } & \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{2} v_0 \right)^2 + \frac{3m}{2} \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{8} m v_0^2 + \frac{3m}{8} v_0^2 \checkmark \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2. \end{aligned}$$

d) Es la misma respuesta que a.

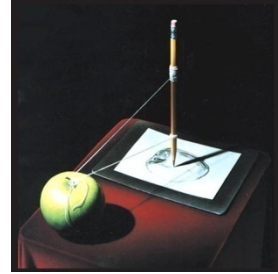
Introducción a la Física Newtoniana



Dos carritos de masas $m_1=m$ y $m_2=2m$ están en reposo en una superficie horizontal lisa, con un resorte comprimido entre ellas, sin estar unido a ninguna masa. Determinar la “mínima energía elástica Q ” que debe tener acumulada el resorte para que, cuando el sistema quede libre, la masa m_2 logre pasar “la barrera gravitatoria” de altura H .



Introducción a la Física Newtoniana



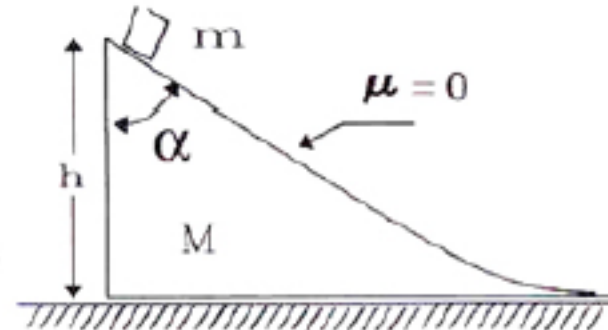
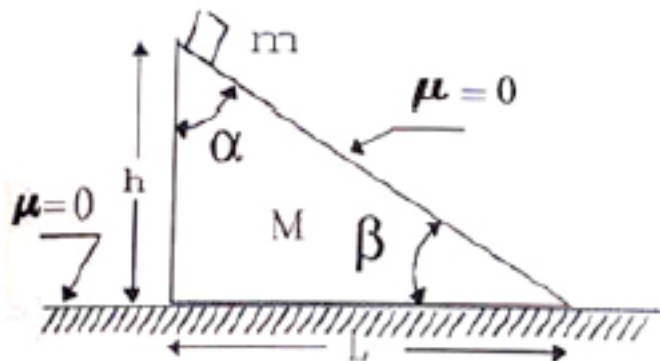
Las superficies de los objetos de la figura: la cuña, el bloque y el piso, no tienen roce. La cuña tiene una masa M , altura h y el lado que está en contacto con el piso, largo L .

Si el bloque de masa m se deja caer desde el vértice superior de la cuña y $\beta > 0$:

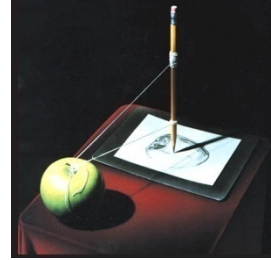
a) ¿cuál es la posición de la masa m , al llegar al piso? En esta pregunta y en las siguientes suponga que el bloque es una masa puntual, con el objeto de reducir los cálculos.

b) ¿Cuál es la relación entre la velocidad de la cuña y la velocidad de la masa m ? Escriba la ecuación de la conservación de la energía para este caso.

c) Para el caso en que $\beta = 0$ (ver Figura), ¿cuál es la velocidad de la cuña y la masa m cuando esta última toca el piso?



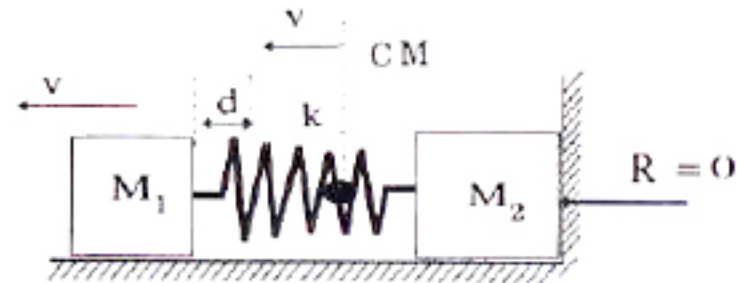
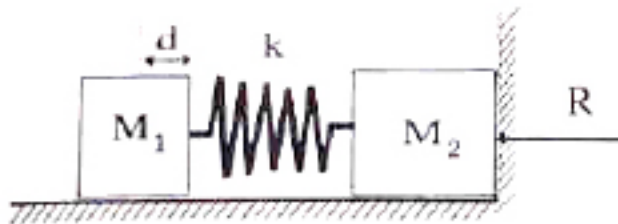
Introducción a la Física Newtoniana



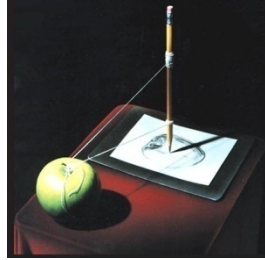
Ejemplo

Dos masas m_1 y m_2 , descansan sobre una mesa sin roce. Un resorte de constante k es comprimido una distancia d , con m_2 pegado a la pared y enseguida el sistema es abandonado desde el reposo.

- Encontrar qué distancia viaja m_1 antes que m_2 comience a moverse.
- En el instante que m_2 ha perdido el contacto con la pared, ¿cuál es la velocidad del CM? ¿Cuál es la velocidad de cada una de las masas?



Introducción a la Física Newtoniana



Problema

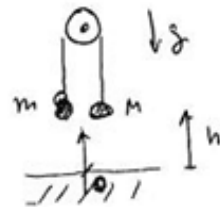
Estudie el movimiento de las dos masas m y M alrededor de la polea que se muestra en la figura.

Los choques de M con el piso son inelásticos ($e=0$)

Los tirones de las cuerdas los suponemos elásticos ($e=1$)

Ambas comienzan a una altura h del piso.

Suponemos que el movimiento no se ve entorpecido por la polea. (sin roce, nunca se desliza de ella ... etc.)



($M > m$)

Conservación de la energía

$$mgh + Mgh = E_0$$

comienzan del reposo.

Posteriormente, justo antes de chocar

M con el piso

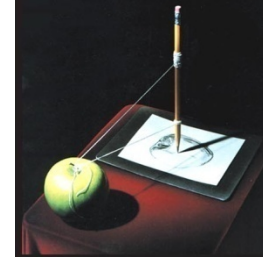
$$(m+M)gh = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}Mv_0^2 + Mg \cdot 0 + mg \cdot 2h$$

$$v_0^2 = \left(\frac{M-m}{M+m} \right) 2gh$$

El momentum del centro de masa en dicho instante es

$$P_0^{cm} = mv_0 - Mv_0 = (m-M)v_0 \quad (1)$$

Introducción a la Física Newtoniana



NOTA: Para el C.M. utilizamos la coordenada y

Para el mov. de las masas m y M usamos lo convencional: sentido a lo largo de la cuerda. De esta forma se convierte en el mismo problema de dos masas atadas por una cuerda.



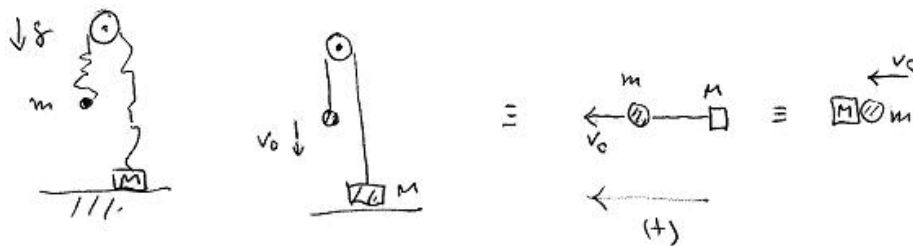
Por ejemplo: $\equiv$



Después del choque, M queda en el piso.

$$P_1^{cm} = m v_0 + M \cdot 0 = m v_0. \quad (2)$$

La partícula m sube y vuelve al mismo punto donde la cuerda vuelve a estar se y actúa sobre M .



Como hemos supuesto el choque elástico,
tenemos

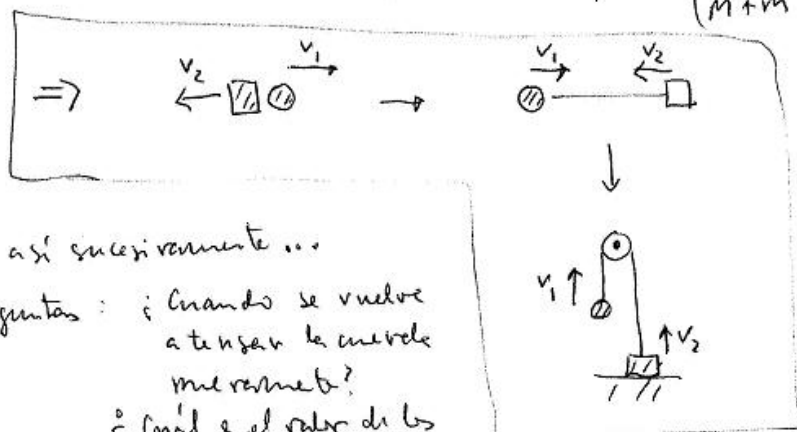
$$\left. \begin{aligned} m v_0 &= m v_1 + M v_2 \\ \frac{1}{2} m v_0^2 &= \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M v_2^2 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} v_0 - v_1 &= \frac{M}{m} v_2 \\ v_0^2 - v_1^2 &= \frac{M}{m} v_2^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_1 + \frac{M}{m} v_2 = v_0 \quad (i)$$

$$-v_1 + v_2 = v_0 \quad (ii)$$

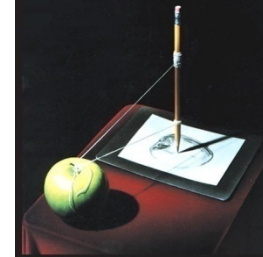
$$\Rightarrow v_2 = \frac{2m v_0}{m + M}$$

$$v_1 = -\left(\frac{M - m}{M + m}\right) v_0$$



y así sucesivamente...

Preguntas: ¿Cuándo se vuelve a tensar la cuerda?
¿Cuál es el valor de las velocidades en ese instante?



Introducción a la Física Newtoniana