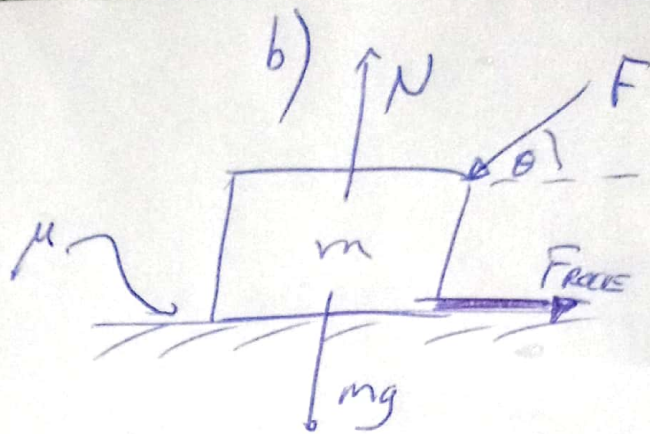
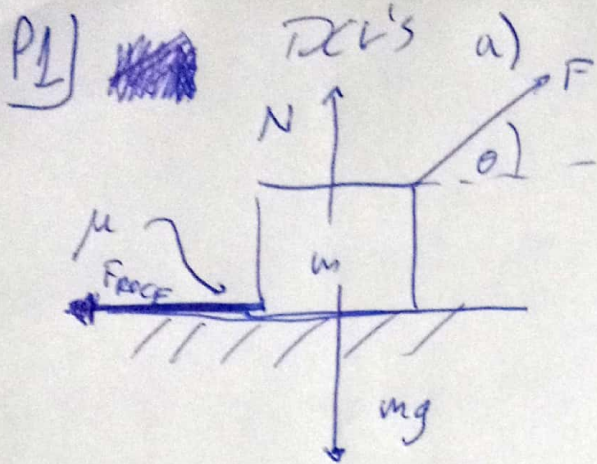




Valor mínimo del ángulo para mover la caja

$$\sum F_x: m \cdot a_x = -F_{roce} + F \cos \theta$$

$$\sum F_x = m a_x = F_{roce} - F \cos \theta$$

$$\sum F_y: m a_y = N + F \sin \theta - mg = 0$$

$$\sum F_y = m a_y = 0 = N - F \sin \theta - mg$$

para mover la caja considerando μ como coef de roce estático.
 $|F_{roce}| \leq \mu N$ en este caso la tomaremos igual para ver el caso crítico en donde la movemos. además $a_y = a_x = 0$ en el caso estático.

$$\mu N = F \cos \theta$$

$$N = mg - F \sin \theta$$

$$\mu mg - \mu F \sin \theta = F \cos \theta$$

$$\mu mg = F (\cos \theta + \mu \sin \theta)$$

$$\frac{\mu mg}{F} = (\cos \theta + \mu \sin \theta)$$

$$\mu N = F \cos \theta$$

$$N = mg + F \sin \theta$$

$$\mu mg + \mu F \sin \theta = F \cos \theta$$

$$\mu mg = F (\cos \theta - \mu \sin \theta)$$

$$\frac{\mu mg}{F} = (\cos \theta - \mu \sin \theta)$$

Analizemos casos de $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\theta = 0$

a) $\frac{\mu mg}{F} = \cos 0 + \mu \sin 0 \Rightarrow \mu mg = F$

b) $\frac{\mu mg}{F} = \cos 0 - \mu \sin 0 \Rightarrow \mu mg = F$

En este caso F debe ser igual a la fuerza de roce

$\theta = \frac{\pi}{2}$

a) $\frac{\mu mg}{F} = \cos \frac{\pi}{2} + \mu \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow mg = F$

b) $\frac{\mu mg}{F} = \cos \frac{\pi}{2} - \mu \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow mg = -F$

En este caso F igual al peso para levantar el objeto.

Ex.Tc

Un caso interesante es cuando F es lo más chico posible; entonces la relación.

a) $\frac{\mu mg}{F} = \frac{\cos \theta + \mu \sin \theta}{1}$

b) $\frac{\mu mg}{F} = \frac{\cos \theta - \mu \sin \theta}{1}$

$\mu mg > F_{\min} \Rightarrow \cos \theta + \mu \sin \theta$ es máximo y $\cos \theta - \mu \sin \theta$ es máximo y así encontraremos el ángulo en el cual para utilizar la mínima fuerza y mover el bloque. Esto se hace optimizando $\cos \pm \mu \sin \theta$ derivando la expresión e igualándola a 0

$-\sin \theta + \mu \cos \theta = 0$

$\mu = \tan \theta$

$\arctan \mu = \theta^*$

$-\sin \theta - \mu \cos \theta$

$-\mu = \tan \theta$

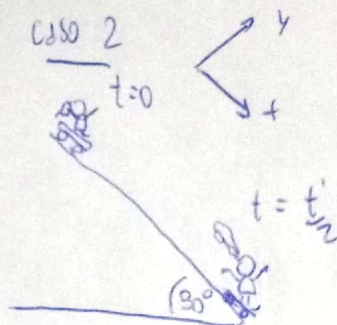
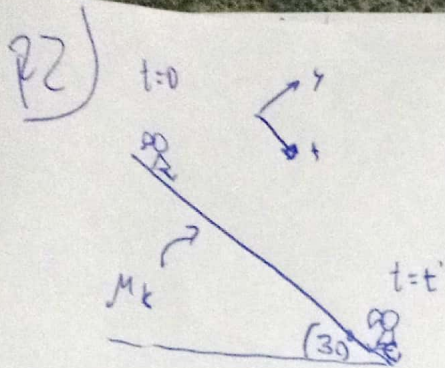
$\theta^{**} = \arctan(-\mu)$

y así encontramos el valor óptimo del ángulo para mover el bloque con la menor fuerza posible.

$F = \frac{\mu mg}{\cos \theta^* + \mu \sin \theta^*}$

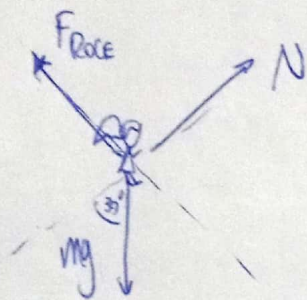
$\rightarrow$ mas grande posible $= \frac{\mu mg}{\cos \theta^{**} - \mu \sin \theta^{**}}$

$= F$



	0°	30°	45°	60°	90°
Sen θ	0	1/2	√2/2	√3/2	1
Cos θ	1	√3/2	√2/2	1/2	0

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\sum F_x = m a_x = m g \sin 30^\circ$$

$$|a_x| = g \sin 30^\circ / (2)$$

$$a_x = \frac{g}{2}$$

$$\sum F_y \Rightarrow N = m g \cos 30^\circ = \frac{m g \sqrt{3}}{2}$$

$$\sum F_x = m a_x = -\mu_k N + m g \sin 30^\circ$$

$$a_x = -\mu_k \frac{m g \sqrt{3}}{2} + \frac{m g}{2}$$

$$(1) \quad a_x = \frac{g}{2} (1 - \mu_k \sqrt{3})$$

$$a_x = g (-\cos 30^\circ \mu_k + \sin 30^\circ)$$

Ecs de itinerario

$$\frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} a_x' \left(\frac{t'}{2}\right)^2$$

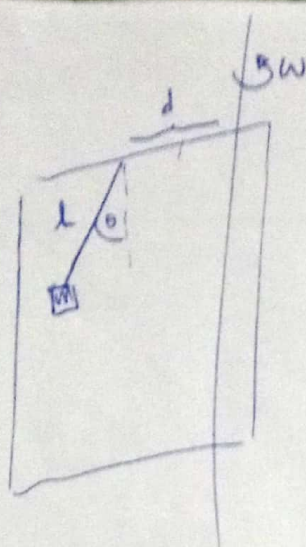
$$a_x = \frac{a_x'}{4}$$

$$\frac{g}{2} (1 - \mu_k \sqrt{3}) = \frac{g}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{1}{4} = \mu_k \sqrt{3}$$

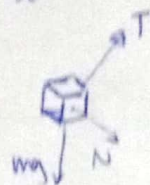
$$\left[\frac{3}{4\sqrt{3}} = \mu_k \right] = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

P3/

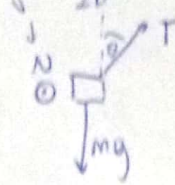


DCL

3D



2D



- ⊙ vector saliendo de la hoja
- ⊗ vector entrando a la hoja.

$$\sum F_x = m a_c = T \sin \theta = m \omega^2 r \quad (1) \text{ donde } r = d + l \sin \theta$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T \cos \theta = mg$$

$$T = \frac{mg}{\cos \theta} \quad (2)$$

saliendo del plano

$$\sum F_z = 0 = N \Rightarrow \boxed{N=0} \quad \checkmark$$

Justificación: la masa está vinculada al plano mediante la cuerda; lo cual se lleva toda la interacción; si hubiera NORMAL entonces existiría una aceleración tangencial por lo que no sería MCU

de (2) en (1)

$$T \sin \theta = m \omega^2 (d + l \sin \theta)$$

$$\frac{mg \sin \theta}{\cos \theta} = m \omega^2 (d + l \sin \theta)$$

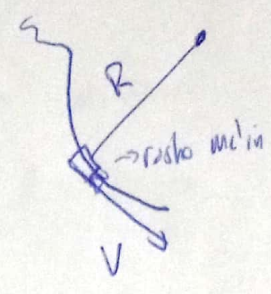
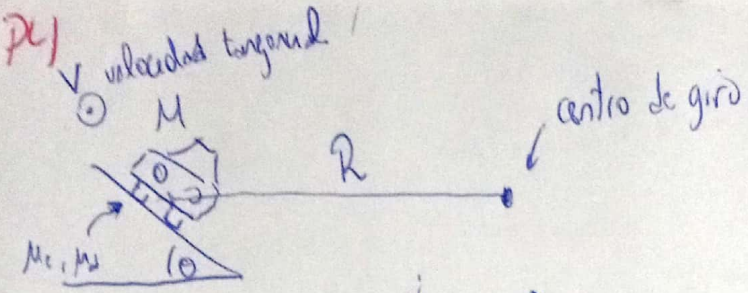
$$\frac{g \tan \theta}{d + l \sin \theta} = \omega^2$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{g \tan \theta}{d + l \sin \theta}}$$

nos quedamos con la solución positiva ya que según el dibujo el plano gira en sentido anti horario

$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan \theta}{d + l \sin \theta}}$$

⊙



a) sin roce

$\sum F_y \Rightarrow mg = N \cos \theta$

$\sum F_x \Rightarrow ma_c = N \sin \theta$

$\Rightarrow \frac{mV^2}{R} = \frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta$

$N = \frac{mg}{\cos \theta} \quad a_c = \frac{V^2}{R}$

ángulo para el cual
racho no se desliza
sin roce

$\boxed{\frac{V^2}{gR} = \tan \theta}$

b) con roce considerando que
el auto puede deslizar por utilizamos
roce estático μ_e



$\sum F_y \Rightarrow 0 = N \cos \theta + F_r \sin \theta - mg$ (1)

$\sum F_x = ma_c = N \sin \theta + F_r \cos \theta$

En el caso critico $\mu_e N = F_r$
considerando que F_r puede ser menor

de (1) $mg = N(\cos \theta - \mu_e \sin \theta)$

de (2) $\frac{mV^2}{R} = N(\sin \theta + \mu_e \cos \theta)$

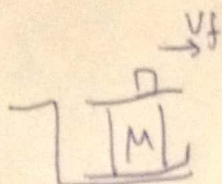
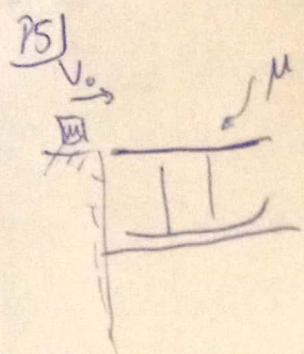
$N = \frac{mg}{\cos \theta - \mu_e \sin \theta}$

$\frac{mV^2}{R} = \frac{mg(\sin \theta + \mu_e \cos \theta)}{\cos \theta - \mu_e \sin \theta} \rightarrow \frac{V^2}{Rg}(\cos \theta - \mu_e \sin \theta) = \sin \theta + \mu_e \cos \theta$

$(V^2 - Rg \mu_e) \cos \theta = \sin \theta (Rg + V^2 \mu_e)$

$\left(\frac{V^2}{Rg} - \mu_e \right) \cos \theta = \sin \theta \left(1 + \frac{\mu_e V^2}{Rg} \right)$

$\boxed{\tan \theta = \frac{V^2 - \mu_e Rg}{Rg + V^2 \mu_e}}$ caso critico



dos cominos

1) momentum

$$mv_0 + M \cdot 0 = (m+M) v_f$$

a)
$$\frac{m v_0}{(m+M)} = v_f$$

b) tiempo

$F_{\text{fric}} = \mu m g = a_x m$

$$v_f = v_0 - \mu g \cdot t$$

$$t = \frac{v_0 - v_f}{\mu \cdot g}$$

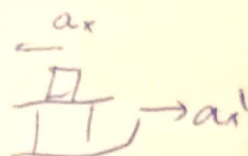
Elavo con $v_f = \frac{m v_0}{m+M}$

c) distancia que recorre sobre la mesa

$M a_x = \mu m g$

$$a_x = \frac{\mu m g}{M}$$

veamos que a_x aceleración del
trineo y a_x aceleración de la
masa



para usar movimiento relativo y dejar de ~~moverse~~ el trineo
queto la masa tendrá una aceleración de $-(a_x' + a_x)$ sobre
la mesa.

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} (a_x' - a_x) t^2 \quad \text{reemplazando con el tiempo anterior}$$

$$d = v \frac{(v_0 - v_f)}{\mu g} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu m g}{M} + \mu g \right) \frac{(v_0 - v_f)^2}{(\mu g)^2}$$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2(a_x' - a_x)d$$

?

$$\frac{v_f^2 - v_0^2}{2(a_x' - a_x)} = d$$

~~ambas correctas y
equivalentes~~

2) solo dinamica sin mov relativo

$$\begin{array}{c} \text{Fe} \\ \rightarrow \\ \boxed{M} \end{array} \quad \Sigma F_x = M a_x' = \mu m g$$

$$a_x' = \frac{\mu m g}{M}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{m} \\ \leftarrow \\ F_R \end{array} \quad \Sigma F_x = m a_x = -\mu m g$$

$$a_x = -\mu g$$

$$V_f = V_0 + a_x' t \quad (1)$$

$$(2) V_f = V_0 + a_x t$$

en cierto momento el bloque se detiene sobre el trineo cuando V_f son iguales para ambos.

$$\cancel{V_0} - \mu g t = \frac{\mu m g}{M} t \quad \rightarrow \text{reemplazando en (1)}$$

$$V_0 = \mu g t \left(1 + \frac{m}{M} \right) t$$

$$V_0 = \mu g t \left(\frac{M+m}{M} \right) t$$

$$V_f = a_x' t$$

$$\cancel{V_f} = \frac{\mu m g}{M} \cdot \frac{M V_0}{\mu g (M+m)}$$

$$b) \quad t = \frac{M V_0}{\mu g (M+m)}$$

$$a) \quad \left[V_f = \frac{m V_0}{(M+m)} \right] \text{ mismo anterior}$$

comprobemos que es el mismo encontrado antes

$$t = \frac{M V_0}{\mu g (M+m)} = \frac{V_0 - V_f}{\mu g} = \frac{V_0 - \frac{m V_0}{M+m}}{\mu g} = \frac{(M+m)V_0 - m V_0}{(M+m) \mu g} = \frac{M V_0}{(M+m) \mu g}$$

~~QED~~

por ultimo solo nos falta encontrar cuanto recorre el trineo y la masa. usando Itinerario o Bernoulli

Itinerario.

$$x_m(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x_M = \frac{1}{2} a'_x t^2$$

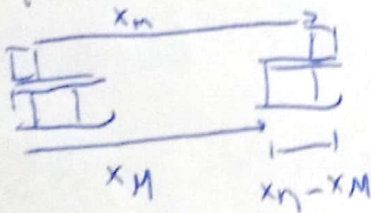
$$v_f^2 = v_0^2 - 2a_x x_m$$

$$x_m = \frac{v_0^2 - v_f^2}{2a_x}$$

$$v_f = 2a'_x x_M$$

$$x_M = \frac{v_f}{2a'_x}$$

lo que recorre el bloque sobre la mesa es $x_m - x_M$



$$d = x_m - x_M = \frac{v_0^2 - v_f^2}{2a_x} - \frac{v_f}{2a'_x}$$

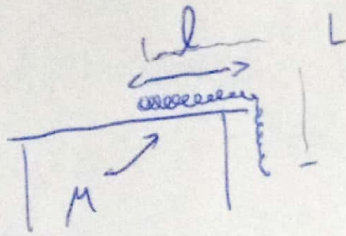
$$\text{ó } d = x_m - x_M = v_0 t - \frac{1}{2} (a_x + a'_x) t^2 \quad \text{con } t = \frac{v_0 - v_f}{\mu g}$$

responso equivalente a la anterior. $v_f = \frac{m v_0}{m+M}$

$$d = \frac{v_0 (v_0 - v_f)}{\mu g} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu m g}{M} + \mu g \right) \frac{(v_0 - v_f)^2}{(\mu g)^2}$$

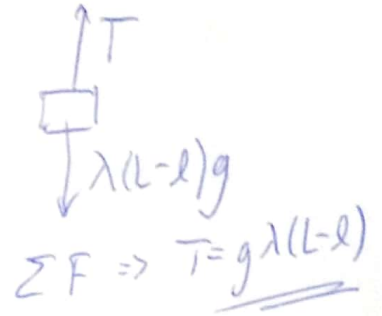
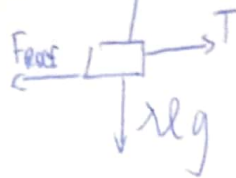
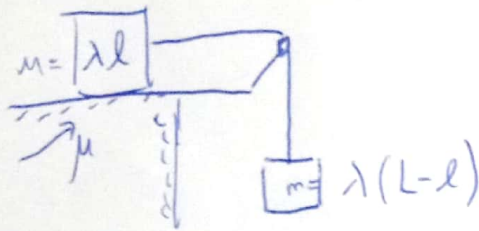
$$d = \frac{(v_0 - v_f)}{\mu g} \left(v_0 - \frac{1}{2} \frac{\mu m g + \mu M g}{M} \frac{v_0 - v_f}{\mu g} \right) = \frac{(v_0 - v_f)}{\mu g} \left(v_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m+M}{M} (v_0 - v_f) \right)$$

P6)



densidad de masa λ
 peso total $= \lambda L$
 valor mínimo de l para que no caiga

podemos modelar al problema con el siguiente



$$\Sigma F \Rightarrow T = \underline{\underline{g \lambda (L-l)}}$$

en el caso crítico $F_{roce} = \mu N$ caso estático $\alpha = 0$

$$\Sigma F_y \Rightarrow N = \lambda l g$$

$$F_{roce} = T$$

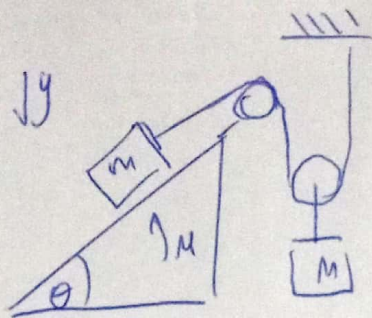
$$\lambda l g \cdot \mu = g \lambda (L-l)$$

$$l \mu = L-l$$

$$l(1+\mu) = L$$

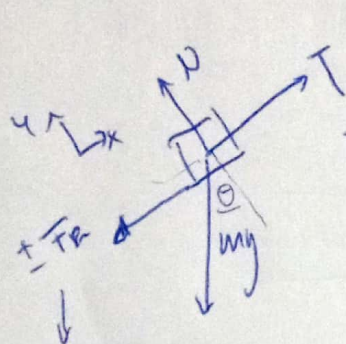
$$\boxed{l = \frac{L}{1+\mu}}$$

P7



Rango de masas M para que permanezca
estático.

$$a=0$$



$$\sum F_y \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$\sum F_x = T - mg \sin \theta \pm F_r = 0$$



$$\sum F \Rightarrow T_1 = Mg$$

$$T \uparrow \quad T \uparrow \quad \sum F \Rightarrow 2T = T_1 \quad (1)$$

de (1) y (2)

$$2T = Mg$$

en el caso estático.

el sentido de F_r depende M y μ
si sube o baja ~~depende~~

en el caso crítico $\mu N = F_r$

Si analizamos $\pm F_r$ encontraremos
los rangos de la masa M
si sube o baja
según el enunciado sube
por lo que nos quedamos
con $-F_r$

Si $M=0$

$$mg \sin \theta = F_r \leq \mu N$$

$$mg \sin \theta \leq \mu mg \cos \theta$$

$\tan \theta \leq \mu$ si esto se cumple

entonces la cota inferior para M es 0

$$\frac{Mg}{2} - mg \sin \theta = \pm F_r \leq \mu N$$

$$T = \frac{Mg}{2}$$

$$\frac{Mg}{2} - mg \sin \theta \leq \pm \mu (mg \cos \theta)$$

$$\frac{Mg}{2} \leq \pm \mu mg \cos \theta + mg \sin \theta$$

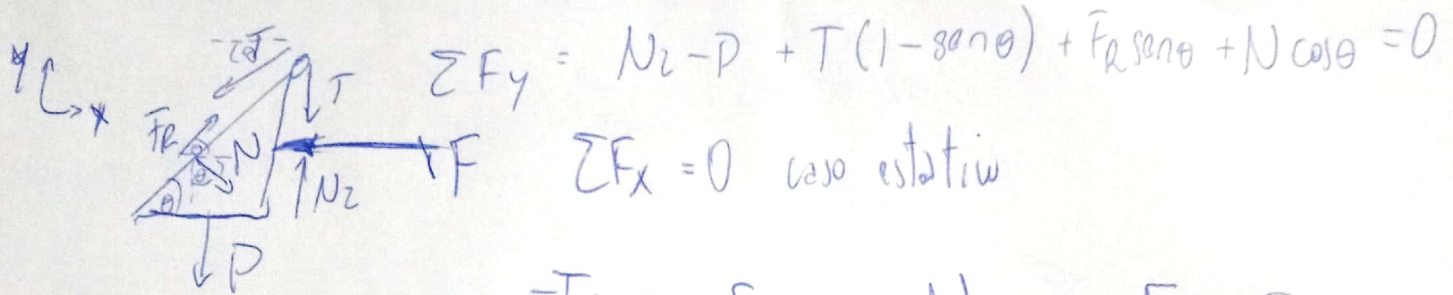
$$\frac{Mg}{2} \leq mg (\sin \theta \pm \mu \cos \theta)$$

$$M \leq 2m (\sin \theta \pm \mu \cos \theta)$$

si sube $M \leq 2(\sin \theta + \mu \cos \theta)m$

si baja $M \leq 2(\sin \theta - \mu \cos \theta)m$
límite superior

b) si el plano inclinado puede deslizar,
 que fuerza se requiere para mantenerlo en reposo?
 ¿es posible que para algún (M, m) sea nula



$$\sum F_y = N_2 - P + T(1 - \sin \theta) + F_r \sin \theta + N \cos \theta = 0$$

$$\sum F_x = 0 \text{ caso estatiu}$$

$$-T \cos \theta + F_r \sin \theta + N \sin \theta - F = 0$$

con $N = mg \cos \theta$

$$F_r \leq \mu N$$

$$T = \frac{Mg}{2}$$

$$F = \cos \theta (F_r - T) + N \sin \theta$$

$$F = \cos \theta (F_r - T + mg \sin \theta)$$

fuerza para mantener el
 plano inclinado en reposo

$$\rightarrow \boxed{F = \cos \theta \left(F_r - \frac{Mg}{2} + mg \sin \theta \right)}$$

F puede ser 0 si $\left(F_r - \frac{Mg}{2} + mg \sin \theta \right) = 0$

$$\mu N \geq F_r = \frac{Mg}{2} - mg \sin \theta$$

$$\mu mg \cos \theta + mg \sin \theta \geq \frac{Mg}{2}$$

$$m(\mu \cos \theta + \sin \theta) \geq \frac{M}{2}$$

$$(\mu \cos \theta + \sin \theta) \geq \frac{M}{m}$$

← si se cumple
 esto, podemos hacer
 que F sea cero.