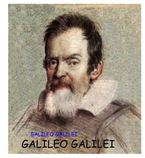
FISICA
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



Profesor Nelson Zamorano
Ayudantes Belén Lequepi
María José Chacón
Prof. Aux. Amparo Guevara
Rocío González
Rodrigo Monsalves

CONTROL # 1 PROBLEMAS

Duración: 120 minutos

PROBLEMA # 1

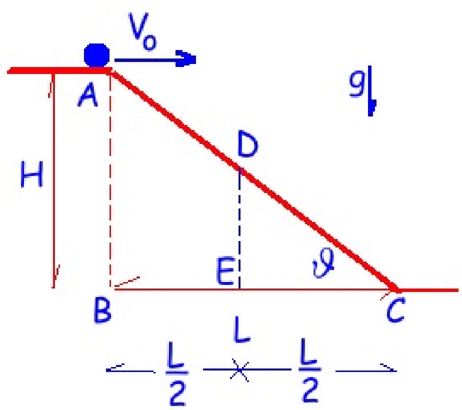
Considere la trayectoria de una partícula lanzada desde el vértice superior de una plano inclinado (Ver Figura). Se conoce la geometría del sistema: su altura **H**, la distancia **L**, la aceleración **g**. El punto medio del tramo AC es el punto **D**.

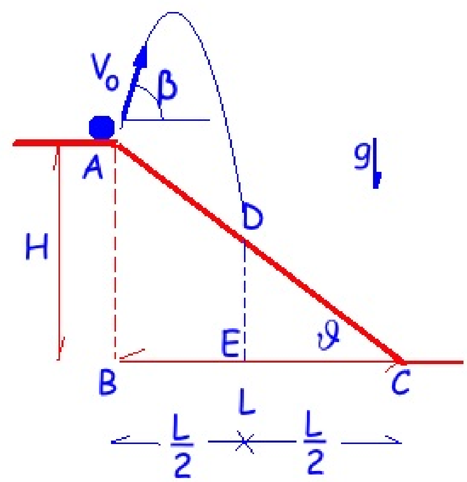
a.- (1.5 Ptos.) Suponga que lanza la partícula en forma horizontal desde el punto **A**. ¿Cuál debe ser el valor de la velocidad $\mathbf{V}_o$ para que la partícula alcance justo el punto **C** cuando toca el piso?

b.- (1 Pto.) ¿Cuál es el vector velocidad de esta partícula al impactar el piso? Indique el ángulo que forma esta velocidad con el plano horizontal (basta indicar el valor de la tangente u otra función trigonométrica en dicho punto) y su magnitud .

c.- (1 Pto.) Suponga que Ud., desde el punto **C**, desea retornar la partícula a su punto original de lanzamiento: **A**. Se pone como meta que la partícula tenga la misma rapidez original de lanzamiento en el punto **A**, pero apunte en sentido opuesto al original. ¿Cómo lo haría?

d.- (2.5 Ptos.) Queremos impactar el punto medio del plano inclinado, lanzando la partícula desde **A** con la misma rapidez inicial $\mathbf{V}_o$ encontrada en la parte a.- , pero con un cierto ángulo β: ¿Qué valor debe tomar este ángulo β para lograrlo (impactar el punto medio **D** del tramo $|\vec{\mathbf{AC}}|$) ?





RESPUESTA:

a.- El tiempo τ que tarda en recorrer la distancia horizontal **L** es

$$V_0 \cdot \tau = L \;\Rightarrow\; V_0 \;=\; \frac{L}{\tau}$$

como no conocemos τ, calculo cuánto demora en caer desde la altura **H**. Uso un sistema de referencia instalado en el punto **A** y apuntando hacia **B**, de este modo la aceleración de gravedad es positiva..

$$y(t) \;= y_o + V_{o-y} \cdot t \,+\, g\frac{t^2}{2}, \quad \text{las condiciones iniciales son,} \;\; y_o \;=\; 0, \quad V_{o-y} \;=\; 0.$$

Usando los datos conocidos, e imponiendo que el tiempo empleado sea τ obtenemos

$$H = g\frac{\tau^2}{2} \;\Rightarrow\; \tau = \sqrt{\frac{2\,H}{g}}.$$

Conociendo τ determino la expresión para la velocidad horizontal en función de los datos conocidos

$$V_0 = \sqrt{\frac{g\,L^2}{2\,H}}.$$

b.- Las componentes de la velocidad son: horizontal, V_o (calculada)
La componente vertical: $V_{(y)} = g\,\tau = \sqrt{2\,g\,H}$
El módulo de la velocidad es:

$$|\vec{V}| = \left[\frac{g\,L^2}{2\,H} + 2\,g\,H\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{g}{2\,H}}\cdot(L^2 + 4\,H^2)^{1/2}.$$

Si la velocidad forma un ángulo α con la vertical en **C**:, $\tan\,\alpha = \dfrac{V_x}{V_y} = \sqrt{\dfrac{g\,L^2}{2\,H}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\,g\,H}} = \dfrac{L}{2\,H}$,

c.- Para que la partícula repita la misma parábola, sólo debo invertir el sentido de la velocidad final, calculada en el punto anterior y mantener la dirección del lanzamiento. Si queremos repetir la misma trayectoria (parábola), repetimos, adecuadamente, sus propiedades.

En este caso debo lanzarla con una rapidez

$$|\vec{V}| = \sqrt{2\,g\,H}\,\left[1 + (\frac{L}{2\,H})^2\right]^{1/2}, \text{ y con el mismo ángulo con la vertical: } \tan\,\alpha = \left(\frac{L}{2\,H}\right).$$

Es la misma trayectoria pero con el tiempo corriendo hacia el pasado.

En forma más precisa: si me dan el punto por donde pasa la parábola (punto **A**), la tangente en dicho punto (la velocidad en **A**, importa sólo su dirección!) y sujeta a la misma aceleración (**g**), *existe una sola parábola*. En este caso, en la parte nos dimos esas condiciones en el punto **A**, construimos la parábola única y pasa por **C**. Ahora medimos los mismos parámetros en **C**: posición, tangente y sujeta a la misma aceleración, y debe dar la misma parábola. Es única! Repite la trayectoria en sentido inverso.

d.- Sistema de referencia: ahora tomamos el eje vertical hacia arriba para no complicarnos con el signo de signo del ángulo β. Parece más cuerdo ahora tomar este mismo sistema de coordenadas en el caso anterior... , ✓

Datos: Sale desde el origen de coordenadas, con V_0, $a = -g$, $Y_{final} = -\dfrac{H}{2}$, $X_{\text{final}} = \dfrac{L}{2}$.

Incógnita: El ángulo β formado por la velocidad inicial con la horizontal en el punto de partida.

Las velocidades de partida son:

$$V_{0-y} = V_0\,\text{sen}\,\beta,\;\; V_{0-x} = V_0\cos\beta.$$

Las ecuaciones de movimiento en cada uno de sus ejes son:

eje X : $X(t) = V_0\cos\beta\cdot t,\quad \dfrac{L}{2} = V_0\cos\beta\cdot\tau.$

eje Y: $Y_{final} = 0 + V_o\,\text{sen}\,\beta\cdot t - g\,\dfrac{t^2}{2},\qquad -\dfrac{H}{2} = V_0\;\text{sen}\,\beta\cdot\tau - g\,\dfrac{\tau^2}{2}.$

Insertando la expresión para τ obtenida del itinerario en el eje-x en la ecuación para y(t), obtenemos una expresión que contiene $\tan\beta$ como única incógnita,

$$-\frac{H}{2} = V_0\,sen\,\beta\,\frac{L}{2}\cdot\frac{1}{V_0\cos\beta} - \frac{g}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{V_0^2\,\cos^2\beta}.$$

simplificando,

$$\frac{H}{2} = -\frac{L}{2}\,\tan\,\beta + \frac{g}{8}\left(\frac{L}{V_0}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\,\beta}.$$

Escribiendo una ecuación cuadrática para $\tan\beta$ (ver formulario al final),

$$\frac{g}{8}\left(\frac{L}{V_0}\right)^2\,\tan^2\beta - \frac{L}{2}\,\tan\,\beta + \left(\frac{g}{8}\,\left(\frac{L}{V_0}\right)^2 - \frac{H}{2}\right) = 0.$$

ordenando

$$\tan^2\beta - \left(\frac{4\,V_o^2}{g\,L}\right)\,\tan\,\beta\,+\,\left[1\,-\,\frac{4\,V_o^2\,H}{g\,L^2}\right]\,=\,0.$$

Antes de continuar, debemos usar análisis dimensional para comprobar que las unidades de cada uno de los términos son las correctas. Ninguna de las expresiones que aparece en la ecuación cuadrática de tan β debe tener unidades, puesto que tan β no las tiene.

$$\left[\frac{V_o^2}{g\,L}\right] = \left[\frac{\frac{L^2}{T^2}}{\frac{L}{T^2}\cdot L}\right] = 1, \qquad \left[\frac{H\,V_o^2}{g\,L^2}\right] = \left[L\,\frac{\frac{L^2}{T^2}}{\frac{L}{T^2}\cdot L^2}\right] = \left[\frac{\frac{L^3}{T^2}}{\frac{L^3}{T^2}}\right] = 1$$

Ahora recordamos que en la parte a obtuvimos

$$V_o\,=\,\sqrt{\frac{g\,L^2}{2\,H}}\ \text{que se puede escribir como}\ \frac{4\,V_o^2}{g\,L}\,=\,\frac{2\,L}{H}\,=\,2\,\frac{1}{H/L}\,=\,\frac{2}{\tan\theta}.$$

la última igualdad se puede verificar en la figura donde se define $\tan\theta\,=\,H/L$.

Reemplazando esta expresión en la ecuación para tan β, obtenemos

$$\tan^2\beta - \left(\frac{2}{\tan\theta}\right)\,\tan\beta\,+\,\left[1\,-\,\frac{2}{\tan\theta}\,\frac{H}{L}\right]\,=\,0\,=\,\tan^2\beta - \left(\frac{2}{\tan\theta}\right)\,\tan\beta\,+\,\left[1\,-\,\frac{2}{\tan\theta}\,\tan\theta\right],$$

$$\tan^2\beta - \left(\frac{2}{\tan\theta}\right)\,\tan\beta\,+\,\left[1\,-\,\frac{2}{\tan\theta}\,\tan\theta\right]\,=\,\tan^2\beta - \left(\frac{2}{\tan\theta}\right)\,\tan\beta\,-1.$$

resolviendo esta ecuación última cuadrática se determinan un par de valores posibles de tan β. Uno de los cuales es la solución del problema.

$$\tan\beta\,=\,\frac{\cos\theta\,+\,1}{\operatorname{sen}\theta},\ \ \text{donde eliminamos el signo (-) por dar un valor negativo para}\ \ \beta.$$

Bastaba llegar a la ecuación cuadrática para tan β para obtener todo el puntaje.

PROBLEMA # 2

Una rueda gira con una velocidad angular constante conocida ω, en torno a un eje perpendicular a su plano de rotación, que atraviesa el centro del disco. Para simplificar la geometría suponemos que la parte inferior del disco pasa apenas un poco más arriba del piso, de modo que no lo roza. Sobre el borde de la rueda se han adosado dos objetos puntuales, en posiciones diametralmente opuestas, como aparece en las figuras.

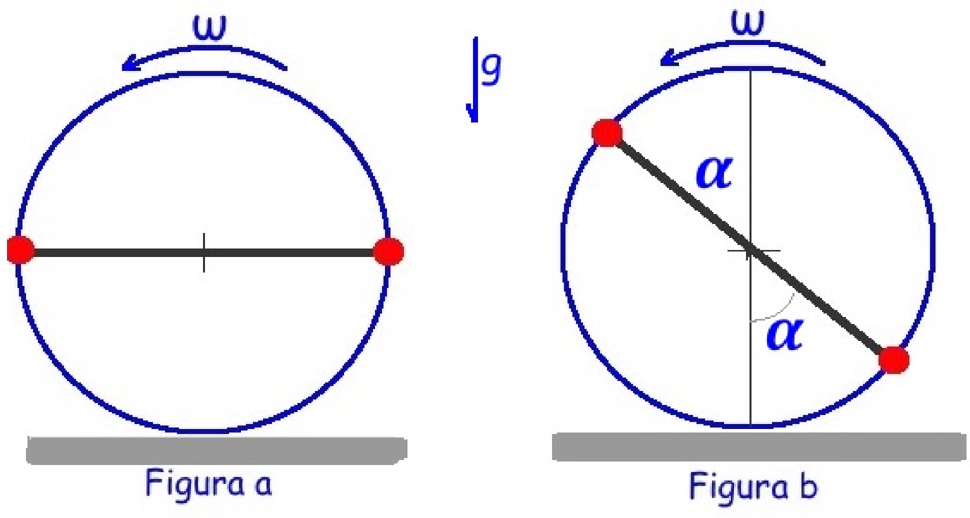
a.- (3 Ptos.) Suponga que cuando el diámetro que une las piedras alcanza la posición horizontal (Figura a), éstas se desprenden del borde simultáneamente con la velocidad tangencial del disco en cada uno de esos puntos. Como consecuencia, una de ellas llega al piso antes que la otra. Se observa que durante el intervalo que transcurre entre la llegada de una de ellas al piso y la llegada de la otra piedra, la rueda da una vuelta completa. A partir de estos datos determine el radio de la rueda **R**. Verifique las dimensiones de su resultado. (Use g como la aceleración de gravedad.)

b.- (2 Ptos.) Una situación más general ocurre si las piedras se desprenden, simultáneamente, cuando el diámetro que las une forma un ángulo α con la vertical (ver Figura b).

Para este caso determine las condiciones iniciales: posición y velocidad, para cada una de las partículas en el momento que se desprenden del disco giratorio. Debe fijar explícitamente su sistema de referencia y expresar las condiciones iniciales en función de cantidades conocidas. Suponga que conoce el valor de **R** calculado en la sección anterior.

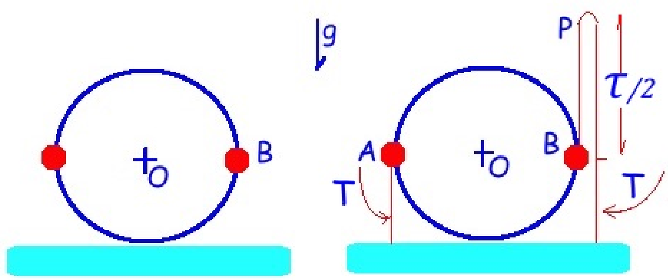
c.- (1 Pto.) Supongamos que se pide determinar el valor del ángulo α para el cual ambas partículas llegan al piso simultáneamente. Declare la estrategia final que Ud. seguiría para resolver este problema. **NO se pide resolverlo, sólo indicar la estrategia a seguir**. Indique si le parece que el problema tiene o no tiene solución y por qué, cuál o cuales serían las condiciones fundamentales para que el requerimiento (la condición pedida en la solución) se cumpla ...

No se pide que proporcione una lista de fórmulas. Puede ayudarse con un gráfico.



Respuesta

Ambos objetos están a la misma altura en el momento de desprenderse del anillo giratorio y con sus velocidades apuntando en sentidos opuestos. Uno de ellos es lanzado verticalmente hacia arriba con velocidad $\mathbf{V}_o$ y, debido a la aceleración $\mathbf{g}$, alcanza una altura máxima (punto **P**) y comienza a caer. Cuando está a la altura del centro **O**, tiene una velocidad $\mathbf{V}_o$ apuntando hacia el piso, igual a la otra partícula al momento de desprenderse. Por tanto el tiempo que le resta para alcanzar el piso desde ese punto es el mismo que le tomó a la primera partícula.



El retraso de la segunda partícula proviene entonces del tiempo empleado en su viaje hasta alcanzar el punto **P** y su bajada.

El tiempo que tarda en este recorrido es

$$V_y(t) = V_o - g\,t, \text{ la velocidad de retorno a su punto de partida es } -\mathbf{V}_o$$

$$V_o = -V_o + g\,\tau, \text{ de aquí, tengo } \tau = \frac{2\,V_o}{g} = \frac{2\,\omega\,R}{g}.$$

Como nos señalan que este tiempo debe corresponder a una vuelta del aro,

$$\tau = T \equiv \frac{2\pi}{\omega} \text{ incorporando la expresión para } \tau \text{ tenemos } \tau = \frac{2\,\omega\,R}{g} = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow R = \frac{\pi\,g}{\omega^2}.$$

b.- **NOTA:** en esta parte suponemos ω y **R** conocidos, $V_0 \equiv \omega\,R$.

Tomamos un sistema de referencia en el centro del aro con su eje vertical apuntando hacia arriba.

La condición pedida indica que ambas partículas deben alcanzar el piso simultáneamente.

Ambas llegan al suelo en el instante $t = \tau$ y su coordenada vertical es $y(t = \tau) = -R$. En el instante $t = 0$, las posiciones de las partículas son:

$$y_A(t) = R\cos\alpha, \qquad y_B(t) = -R\cos\alpha.$$

Para $t=\tau$ la posición de las partículas es:

$$\begin{aligned} y_A(\tau) &= R\cos\alpha - (R\,\omega\,\text{sen}\,\alpha)\,\tau - \frac{1}{2}\,g\,\tau^2 &= -R \\ y_B(\tau) &= -R\cos\alpha + R\,\omega\,\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}\,g\,\tau^2 &= -R \end{aligned}$$

Sumando y restando estas ecuaciones:

$$\begin{aligned} g\,\tau^2 &= 2R. \\ R\cos\alpha - R\,\omega\,\sin\alpha\,\tau &= 0. \\ \tan\alpha &= \sqrt{\frac{g}{2\,R\,\omega^2}} \end{aligned}$$

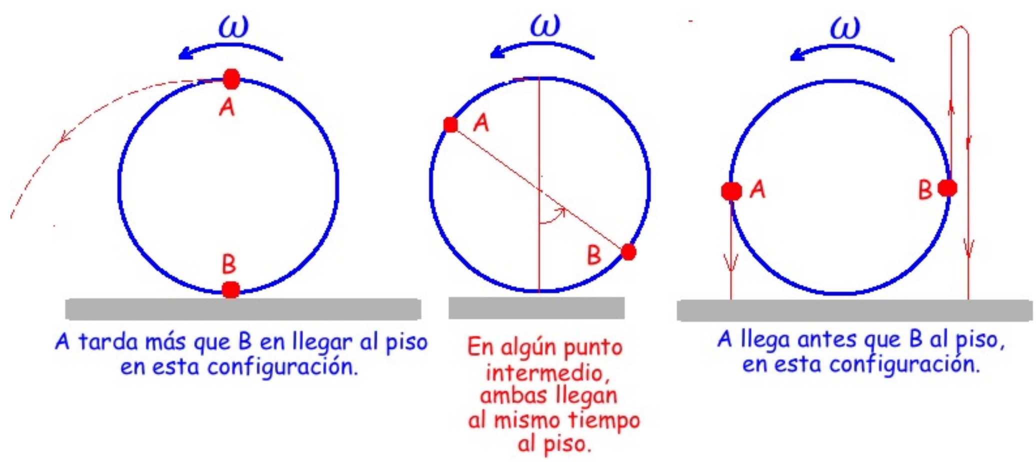
c.- Cuando el diámetro que une ambas partículas es vertical, la partícula en el punto más alto tarda más en llegar al piso.

Cuando el diámetro gira y aparece horizontal, los papeles de las partículas se intercambian: la que tardaba más llega ahora primero. Debe existir una posición intermedia del diámetro (α) en la cual ambas logran llegar simultáneamente al piso.

Las condiciones relevantes son :

– Sólo la componente vertical de la trayectoria es relevante. La componente horizontal, no interesa: no importa donde caen las partículas sino que lo hagan simultáneamente.

– Las condiciones conocidas son la posición inicial ($t=0$) de cada partícula y el instante en que ambas tocan piso ($t=\tau$).



$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + v(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 \\ v(t)^2 &= v(t_0)^2 + 2a(x(t) - x(t_0)) \\ v(t) &= v(t_0) + a(t-t_0) \end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{\cos\theta}\right]^2 = 1 + (\tan\theta)^2.$$