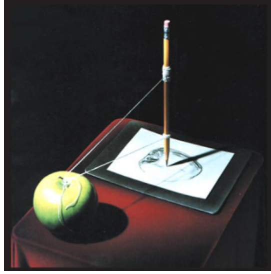
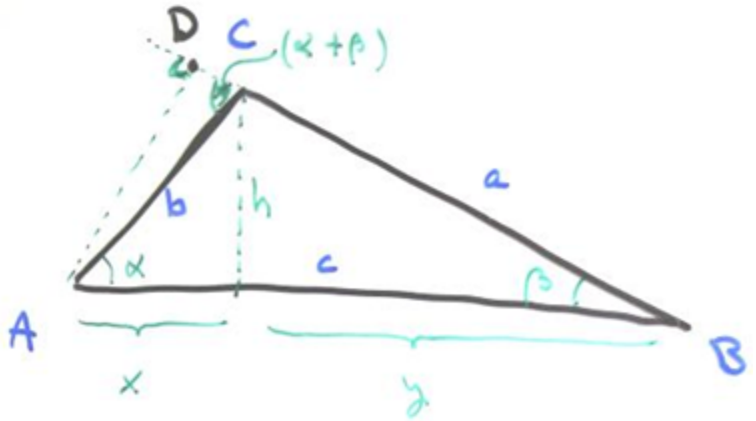
Introducción a la Física Newtoniana



Demostración geométrica de la igualdad del seno de la suma de ángulos en función de cada uno de los ángulos.

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta}$$



$$\frac{1}{2}(x+y)\cdot h = \frac{1}{2}\cdot a\cdot AD$$

$$(\underbrace{b\cos\alpha} + \underbrace{a\cos\beta})\cdot h = a\cdot b\,\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

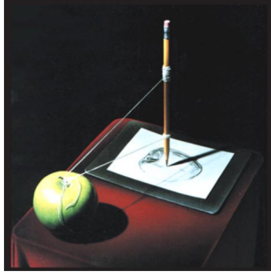
$$h \nearrow = a\,\operatorname{sen}\beta$$

$$h \searrow = b\,\operatorname{sen}\alpha$$

$$\overbrace{b\,a\,\operatorname{sen}\beta\cos\alpha} + \overbrace{a\,b\,\operatorname{sen}\alpha\cos\beta} =$$

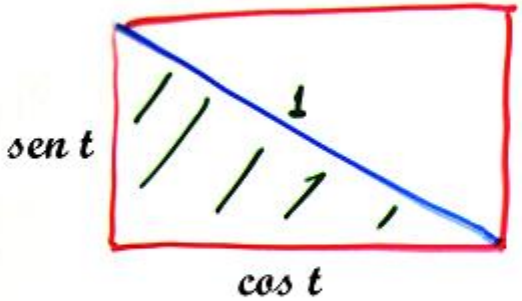
$$a\cdot b\,\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

Introducción a la Física Newtoniana



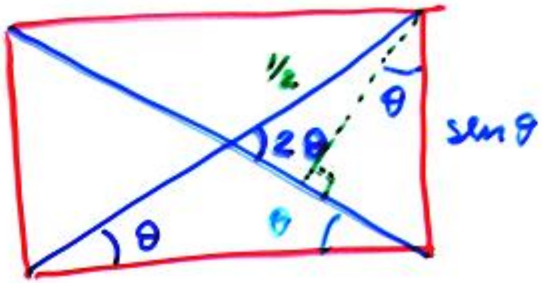
Cálculo geométrico del ángulo doble

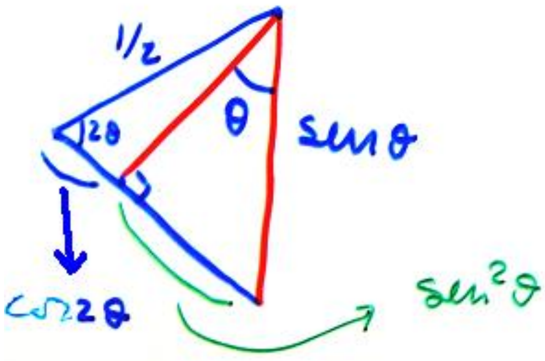
El área del triángulo estudiado calculado con los dos triángulos generados por la diagonal del rectángulo



$$\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t\,\cos t = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{sen}\,2t}{2}$$

$$\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta$$

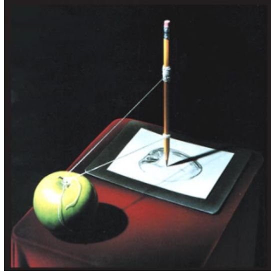




$$\frac{1}{2}\cos 2\theta + \mathrm{sen}^2\theta = \frac{1}{2}$$

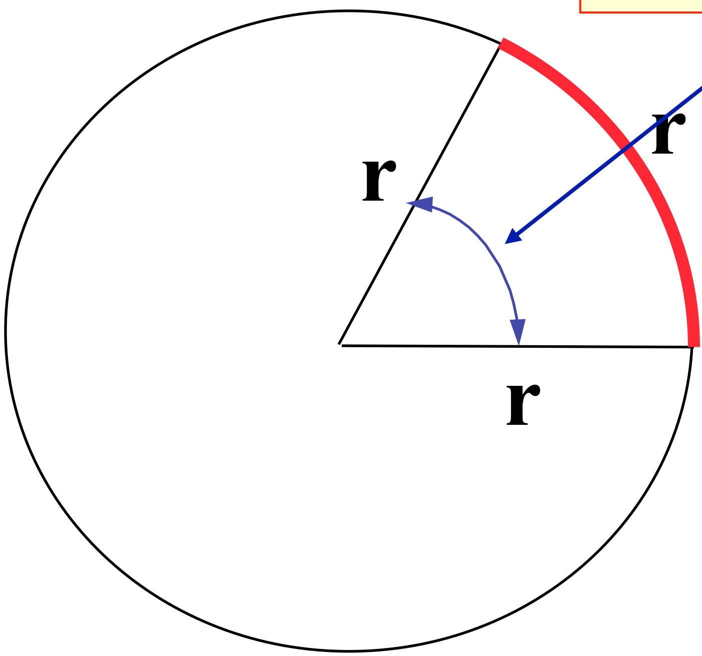
$$\boxed{\mathrm{sen}^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\theta\right)}$$

Introducción a la Física Newtoniana



¿Qué es 1 radián?

Esto es 1 radian (1 rad) !!



¿Cuántos radianes hay en la circunferencia completa? Es decir ¿Cuántos radianes hay en 360º?

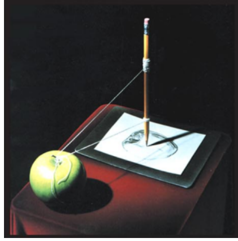
$$\frac{2\pi\, r}{r} = 2\pi$$

¿A cuánto grados sexagesimales (º) corresponde 1 rad?

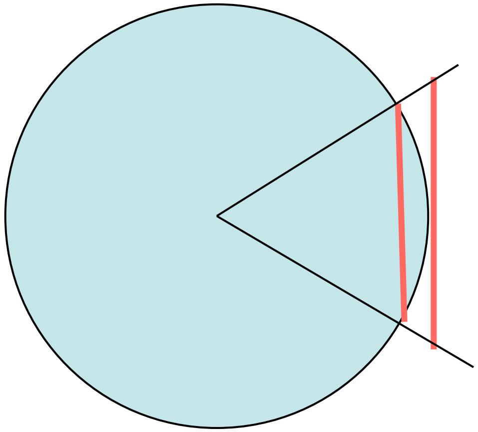
$$\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = \frac{1 \text{ rad}}{x^\circ}$$

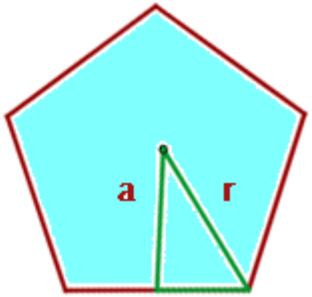
$$1 \text{ rad} \approx 57{,}295\ ^\circ$$

Introducción a la Física Newtoniana



Construcción de un Pentágono Regular Inscrito y Exinscrito



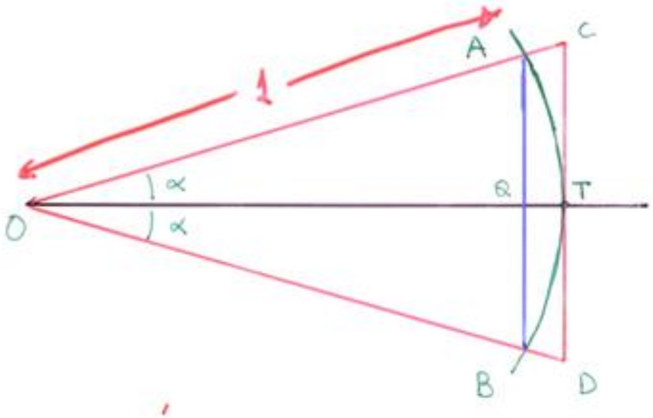


Existen infinitos polígonos regulares inscritos y Exinscritos.
Note que al aumentar el número de lados, ambos polígonos regulares se van aproximando a la circunferencia

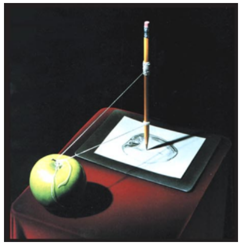
Lo que nos interesa es la comparación entre la magnitud del largo de la cuerda y el segmento tangente con el arco de circunferencia encerrado entre dichos segmentos.

La razón:

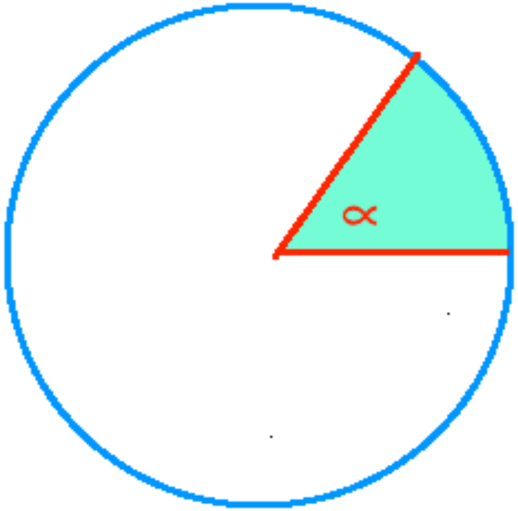
Es una de las aproximaciones más frecuentes en nuestro enfoque geométrico del cálculo que utilizaremos en este curso.

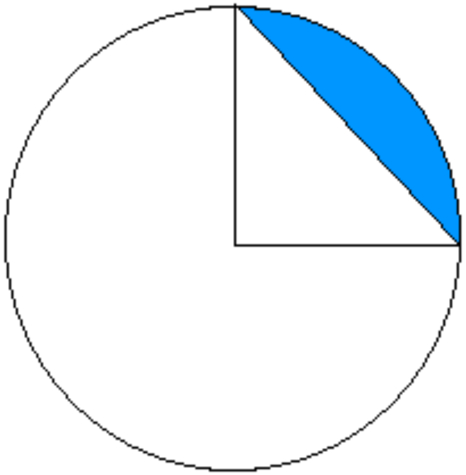


Introducción a la Física Newtoniana



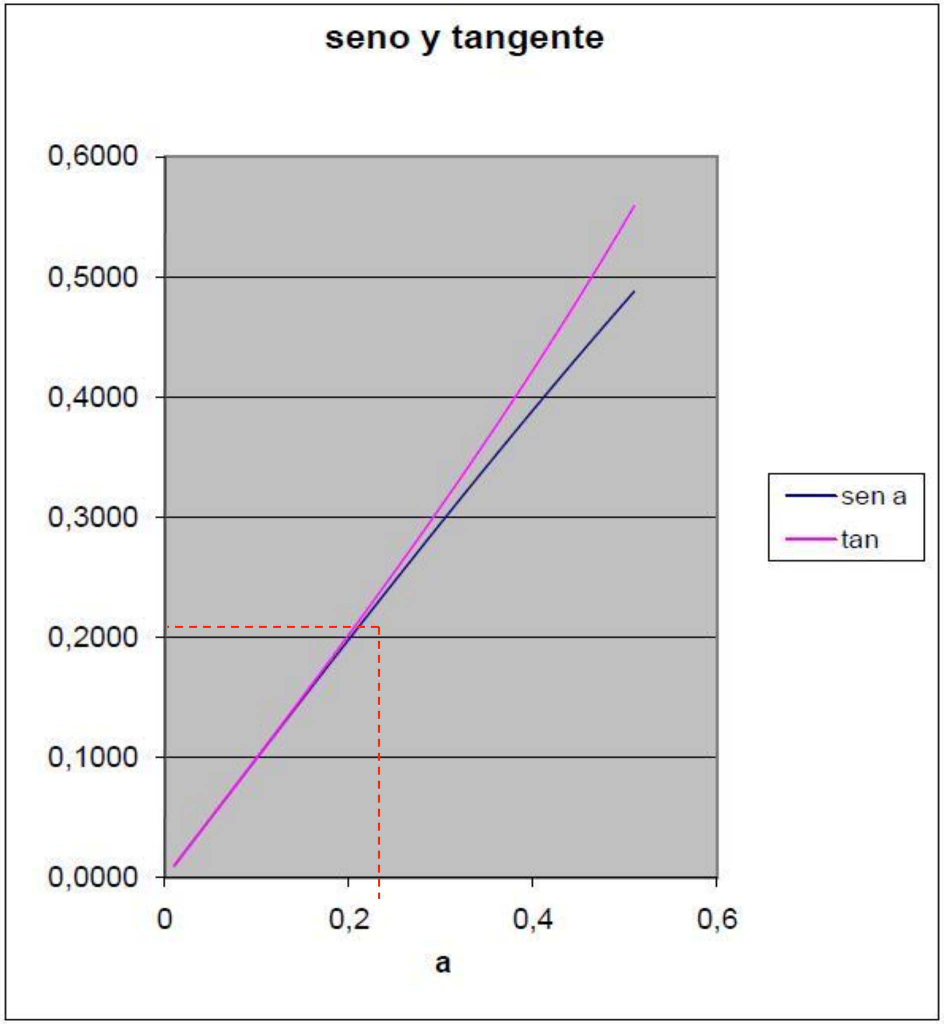
Ejemplos

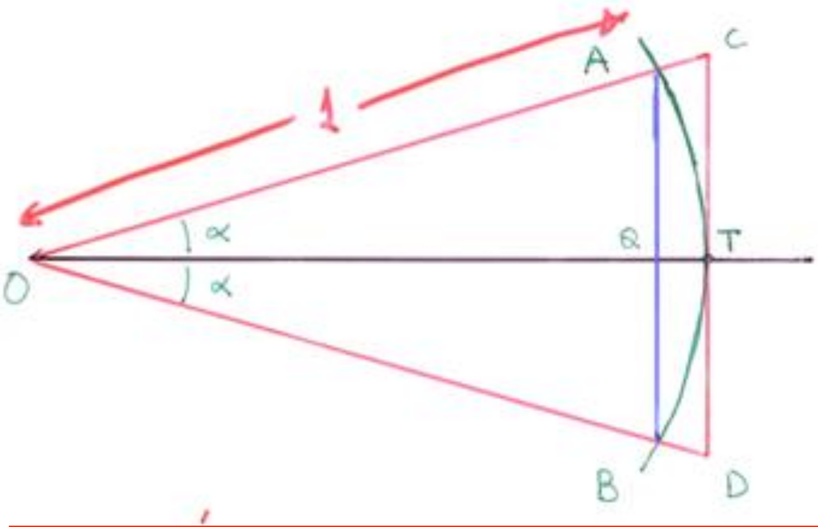




Calcule el área achurada en ambas figuras. ¿Cuál es el valor del área sin achurar en el Círculo de la derecha?

Introducción a la Física Newtoniana

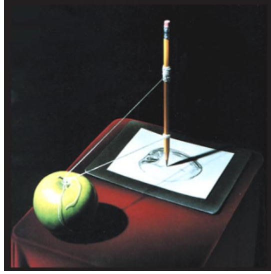




Cuando el ángulo α , medido en radianes es suficientemente pequeño, los trazos QA y TC son indistinguibles, por tanto α es también comparable con esos trazos.

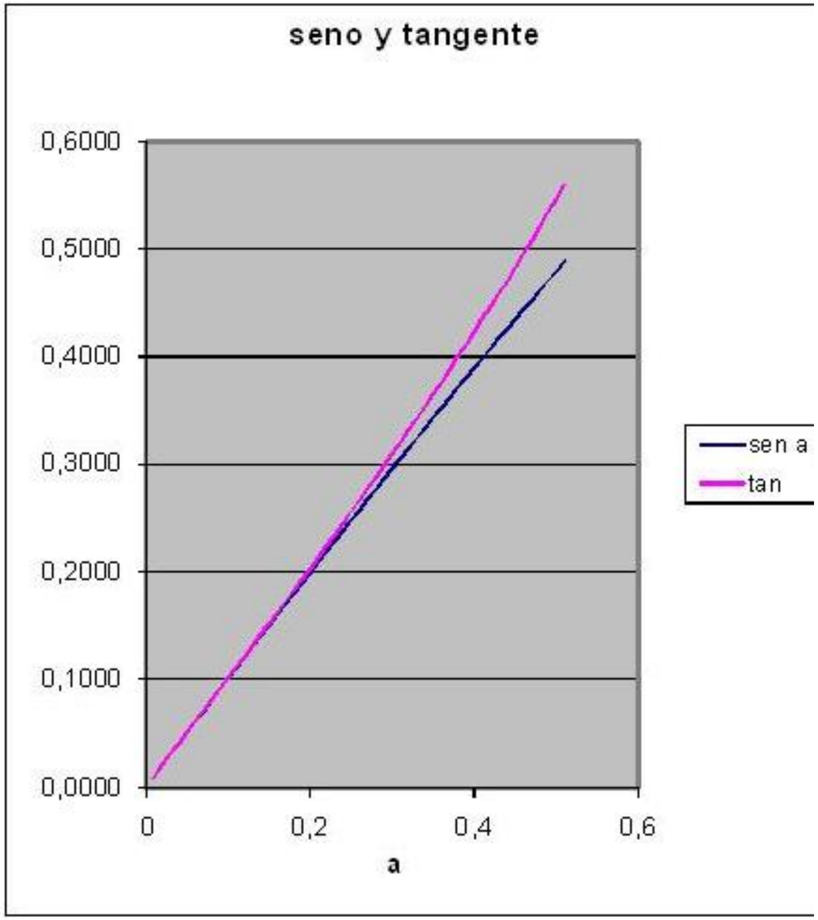
Podemos igualar el arco con la cuerda y cometer un error que puede ser tan pequeña como uno quiera.

Introducción a la Física Newtoniana

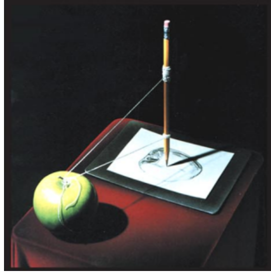


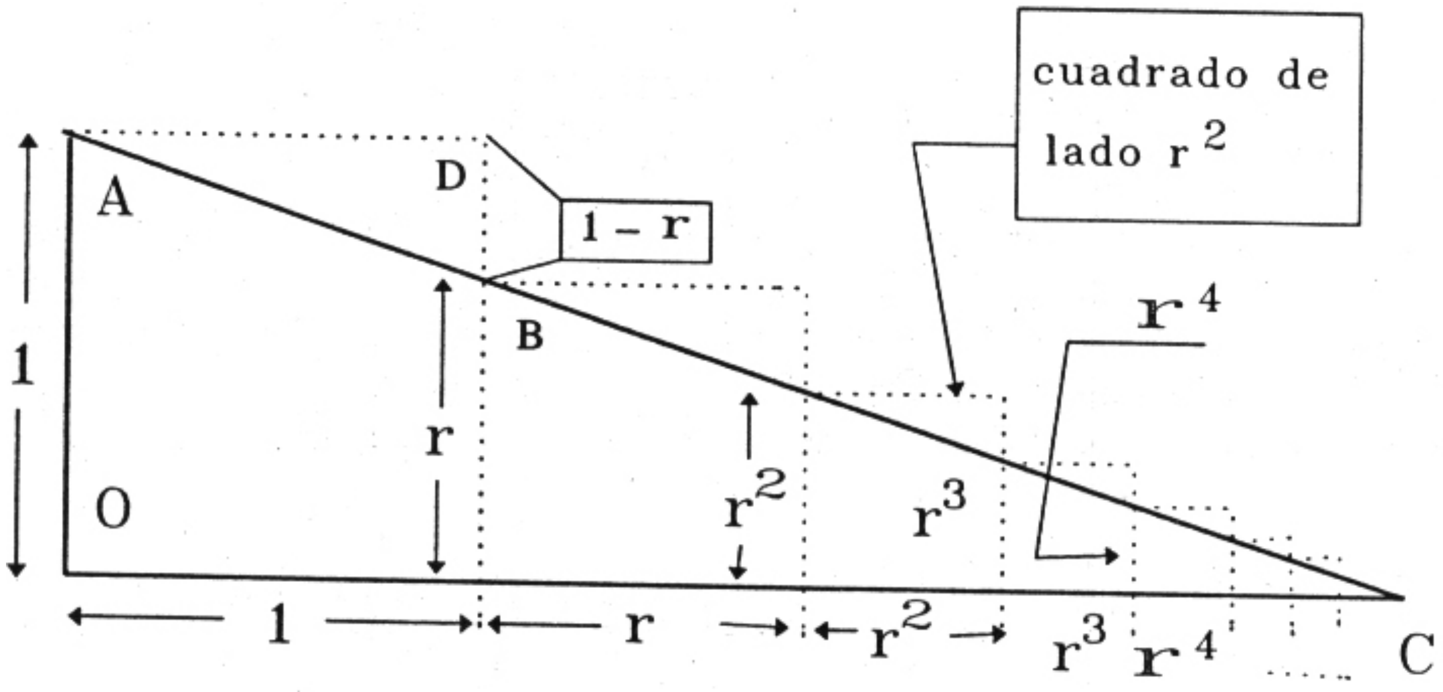
El gráfico muestra el grado de acercamiento entre el sen, la tangente y alpha medido en radianes.

GRÁFICO SEN y TAN α				
SEN A	A-RADIANES	TAN A		A-GRADOS
0,0100	0,01	0,0100		0,5729
0,0200	0,02	0,0200		1,1458
0,0300	0,03	0,0300		1,7187
0,0400	0,04	0,0400		2,2916
0,0500	0,05	0,0500		2,8645
0,0600	0,06	0,0601		3,4374
0,0699	0,07	0,0701		4,0103
0,0799	0,08	0,0802		4,5832
0,0899	0,09	0,0902		5,1561
0,0998	0,1	0,1003		5,729
0,1098	0,11	0,1104		6,3019
0,1197	0,12	0,1206		6,8748
0,1296	0,13	0,1307		7,4477
0,1395	0,14	0,1409		8,0206
0,1494	0,15	0,1511		8,5935
0,1593	0,16	0,1614		9,1664
0,1692	0,17	0,1717		9,7393
0,1790	0,18	0,1820		10,3122
0,1889	0,19	0,1923		10,8851
0,1987	0,2	0,2027		11,458
0,2085	0,21	0,2131		12,0309
0,2182	0,22	0,2236		12,6038
0,2280	0,23	0,2341		13,1767
0,2377	0,24	0,2447		13,7496
0,2474	0,25	0,2553		14,3225
0,2571	0,26	0,2660		14,8954
0,2667	0,27	0,2768		15,4683
0,2764	0,28	0,2876		16,0412
0,2860	0,29	0,2984		16,6141
0,2955	0,3	0,3093		17,187
0,3051	0,31	0,3203		17,7599
0,3146	0,32	0,3314		18,3328

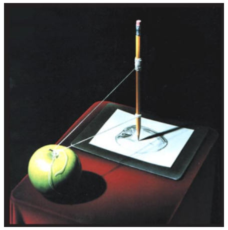


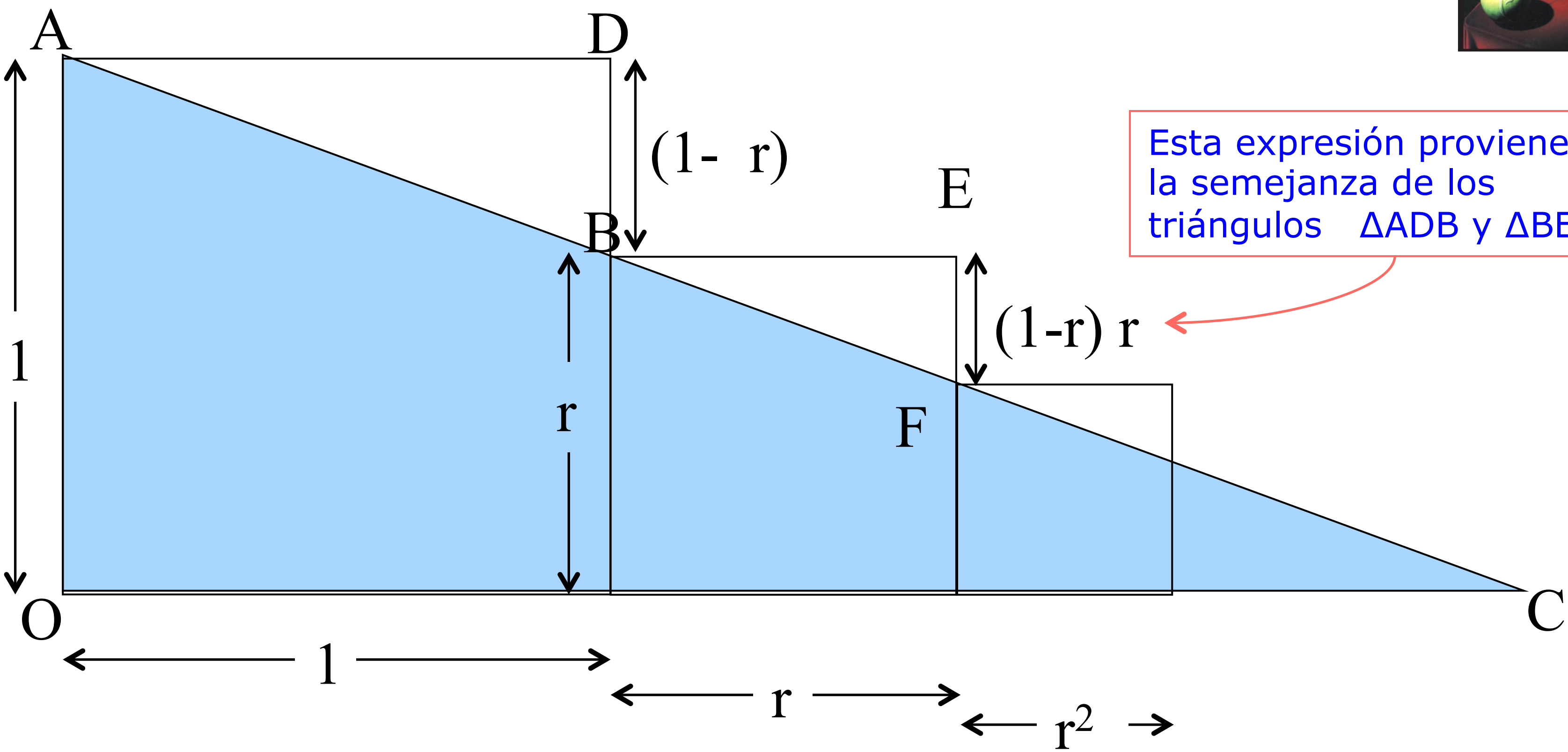
Introducción a la Física Newtoniana





Introducción a la Física Newtoniana



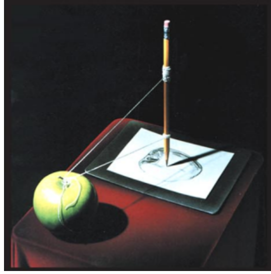


Esta expresión proviene de la semejanza de los triángulos ΔADB y ΔBEF

AOC es semejante con Δ DBA

$$\frac{AD}{DB} = \frac{OC}{AO} \Rightarrow \frac{1}{(1-r)} = \frac{\left(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 \ldots\right)}{1} = \sum_{i=0}^{n} r^i$$

Introducción a la Física Newtoniana



SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS REALES

Una sucesión es un conjunto ordenado de términos, que cumplen una ley determinada

Es una *aplicación* que representaremos por

$$\{x_n\} \qquad \begin{array}{c} N \rightarrow \Re \\ n \rightarrow x_n \end{array}$$

Números naturales

Números reales

Ejemplo:

$\{a_n\} = 3/(10^n)$, este es el término genérico. Otros de los elementos son:

$a_1 = 3/10^1$

$a_2 = 3/10^2$

$a_3 = 3/10^3$

...

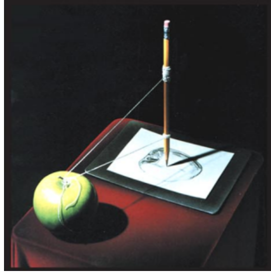
$a_{10} = 3/10^{10}$

...

Escribir los 4 primeros términos de las siguientes sucesiones:

1.- $\{1/\sqrt{n}\}$,
2.- $\{n^2 + n\}$,
3.- $\{(-1)/n\}$.

Introducción a la Física Newtoniana



SUCESIONES

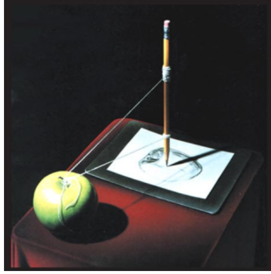
Ejemplos:

$$\{x_n\} \equiv \frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

$$\{x_n\} \equiv \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \cdots, \frac{1}{n^2}, \cdots$$

$$\rightarrow 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \cdots, \frac{1}{n^2}, \cdots$$

Introducción a la Física Newtoniana



SUMATORIAS

Símbolo de la SUMATORIA:

Supóngase dada una cantidad finita de números

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

y consideramos la suma

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

En general esta expresión se escribe utilizando el símbolo

$$\sum$$

llamado sumatoria.

Ejemplo

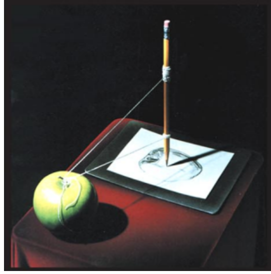
$a_0 \ +a_1 \ +a_2 \ +a_3 \ +a_4 \ldots = ??$

$$\sum_{k=0}^{k=N} \mathbf{a_k} = ?$$

Si $N \longrightarrow$ Infinito

Entonces la sumatoria es 1/3.

Introducción a la Física Newtoniana



SUMATORIAS

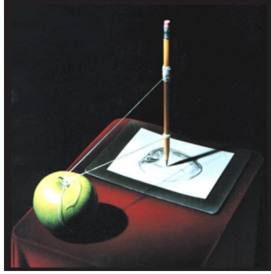
Este símbolo se usa …

Límite superior

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

Límite inferior

El elemento a_k se llama <u>*término general de la suma*</u>



Ejemplo

Se quiere expresar la suma de los cuadrados de los primeros 10 naturales:

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2$$

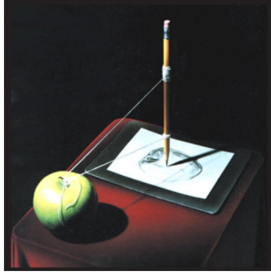
es decir

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$$

En este caso, es fácil ver que el término general es $a_k = k^2$ con lo que la suma (expresada con nuestro "nuevo" símbolo) es

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 = 385$$

Introducción a la Física Newtoniana



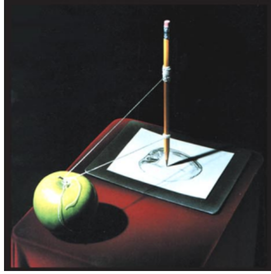
SERIES

Otro ejemplo de serie

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1!}\cdot x^{n-1}\cdot y + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot x^{n-2}\cdot y^2 + \ldots$$

Para n=1

$$(x+y)^1 = x^1 + x^0\cdot y = x + y$$



SERIES

Algunas series tienen infinitos (∞) términos, pero convergen a un número finito (series convergentes)...

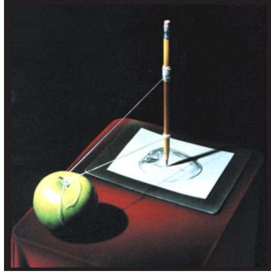
¿Cómo vemos esto?

Infinitos términos

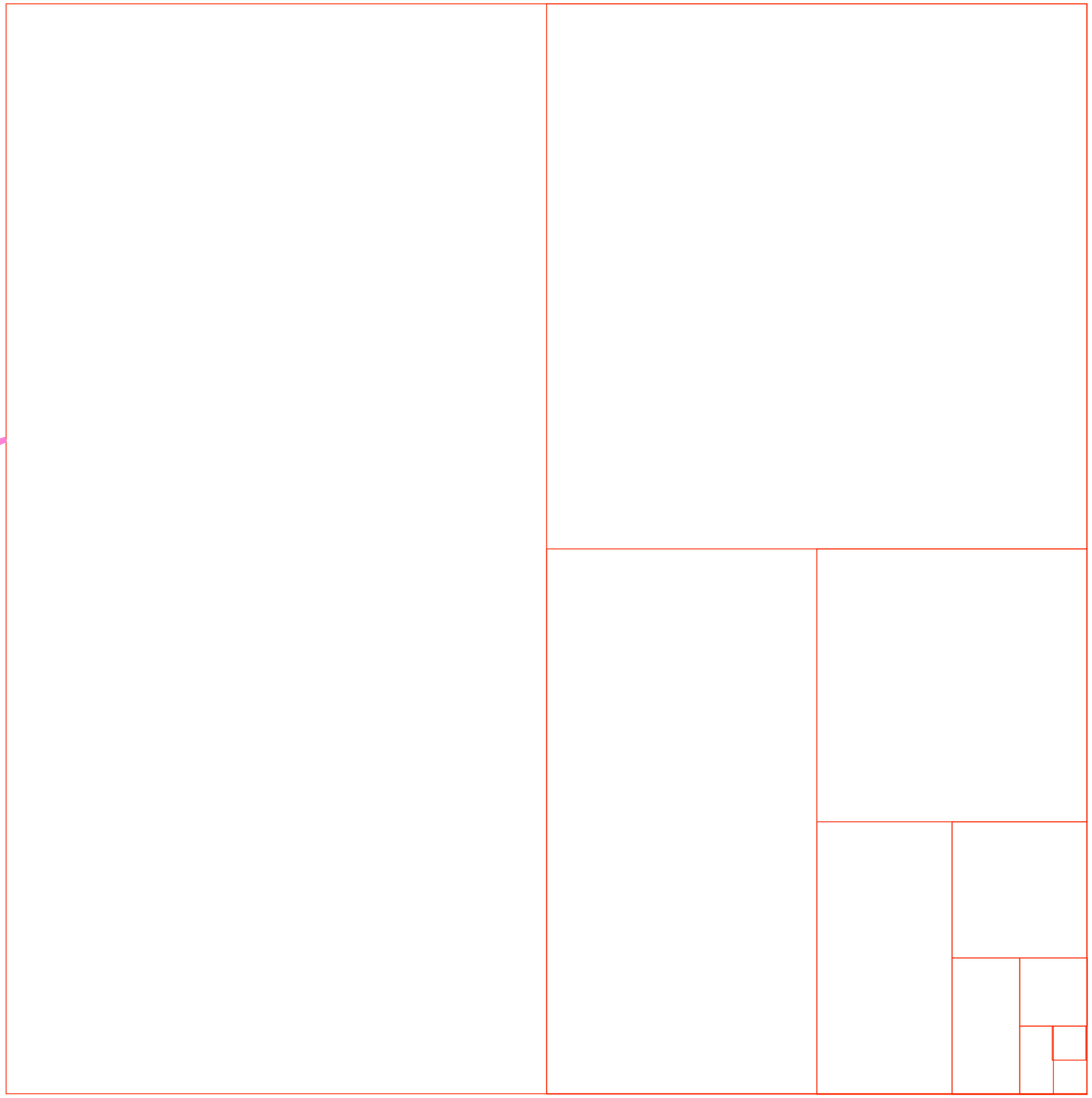
Se puede demostrar
En forma geométrica!

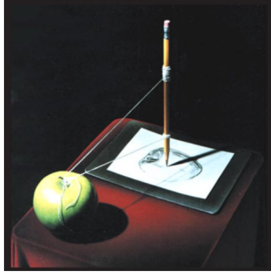
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\frac{1}{2^j}+\cdots=2$$

Introducción a la Física Newtoniana



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{n}}=1$$





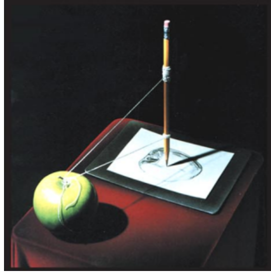
SERIES

El binomio es extendido a cualquier n real (positivo o negativo)

- Para el caso n = -1

$$(1-x)^{-1} = 1 + \frac{(-1)}{1!}(-x) + \frac{(-1)\cdot(-1-1)}{2!}\cdot x^2 + \frac{(-1)\cdot(-1-1)\cdot(-1-2)}{3\,!}\cdot x^3 + \cdots$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$



SERIES

Una serie muy usada en física es

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

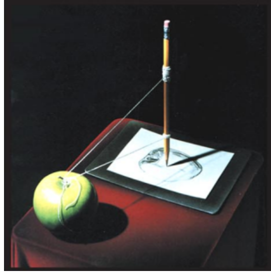
Esta serie está definida si $|x| < 1$

Para el caso en que se puede aproximar como: $|x| << 1$

Este símbolo significa MODULO

$$\frac{1}{1-x} \approx (1 + x)$$

Podemos estimar el error en esta aproximación.
Es del orden de x^2



SERIES

Existen muchas series conocidas que se usan en Física.

Aquí hay más ejemplos

$$sen(\alpha) = \alpha^1 - \frac{\alpha^3}{3\,!} + \frac{\alpha^5}{5\,!} - \frac{\alpha^7}{7\,!} + \cdots$$

α DEBE estar expresado en RADIANES

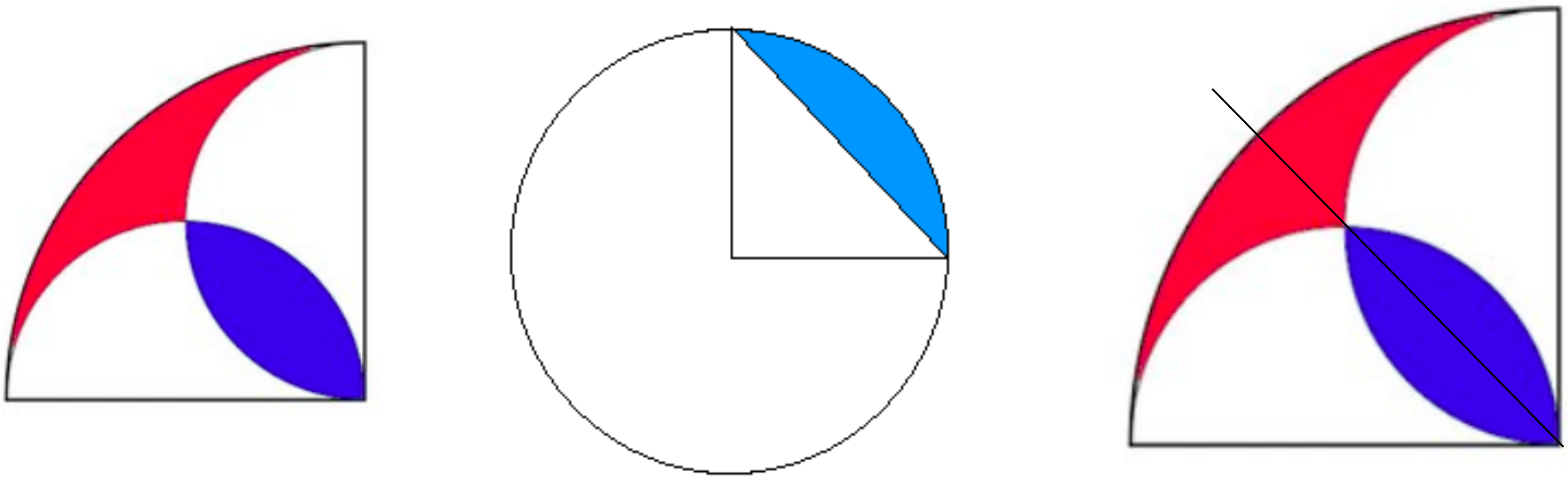
$$\cos(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{2\,!} + \frac{\alpha^4}{4\,!} - \frac{\alpha^6}{6\,!} + \cdots$$

Número e de Euler

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} \cdots$$

$$e^1 = 2.72$$

Introducción a la Física Newtoniana



Demuestre que el área azul es igual al área roja de a Figura de la izquierda. La zona azul representa el área común de los dos semicírculos pequeños.

Se sugiere que calcule el área achurada indicada en la figura del medio.
Una vez calculada, utilice dicho valor para calcular el área roja. Se sugiere usar la división simétrica establecida por la recta dibujada.