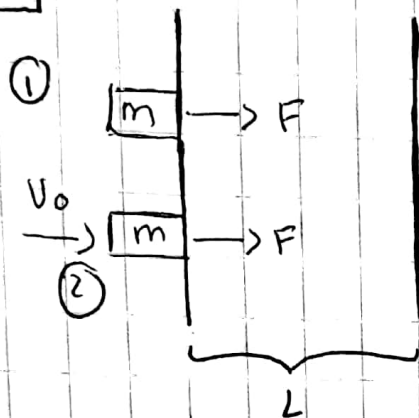


PI



* Empujamos ambas masitas una distancia L

¿Cuál varía más su momentum?

→ Recordemos que $p = m \cdot v \Rightarrow \Delta p = m \Delta v$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ aceleración}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = m \cdot a = F \Rightarrow \Delta p = F \cdot \Delta t \text{ Impulso}$$

→ Entonces, como ambas masas son empujadas por una fuerza F , basta ver cuál se demora más en recorrer L .

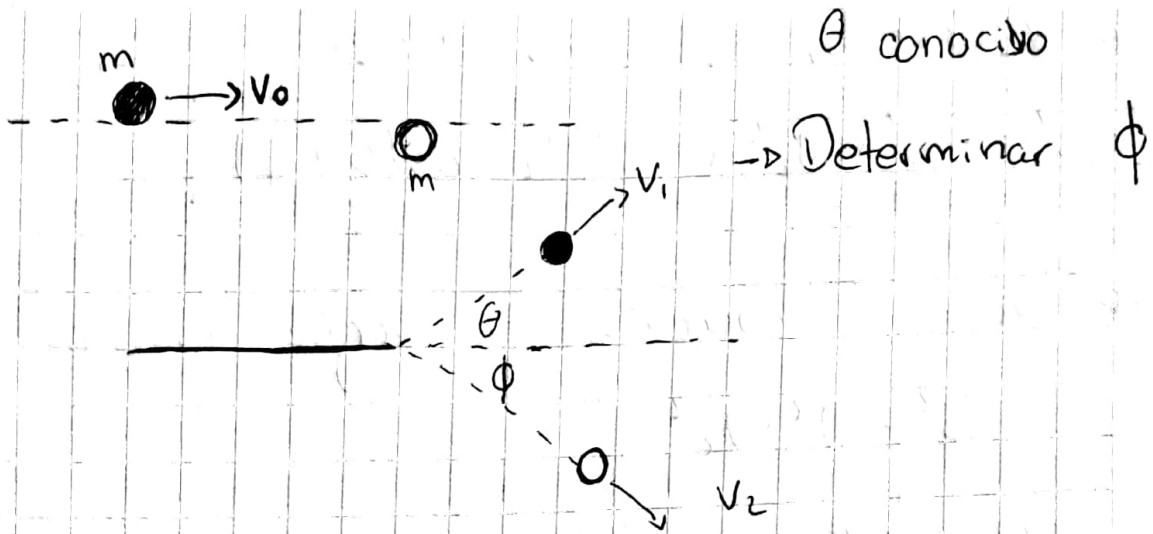
→ Y finalmente, como una parte del reposo y la otra con velocidad v_0 , y ambas tienen la misma aceleración, se demora más la que tiene $v_i = 0$

→ Por lo que, la que varía más su momentum es la masa ①.

→ Igualmente válido es calcular la aceleración ($\frac{F}{m}$) y con cinemática determinar el cambio de velocidad.

P2]

Antes



→ Cons Momentum

$$\underline{x}] \quad m v_0 = m v_1 \cos \theta + m v_2 \cos \phi \quad (1)$$

$$\underline{y}] \quad 0 = m v_1 \sin \theta - m v_2 \sin \phi \quad (2)$$

→ Cons Energía

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 \Rightarrow \boxed{v_0^2 = v_1^2 + v_2^2} \quad (3)$$

→ Elevo al cuadrado (1) y (2). luego las sumo

$$(1)^2 \Rightarrow v_0^2 = v_1^2 \cos^2 \theta + 2 v_1 v_2 \cos \theta \cos \phi + v_2^2 \cos^2 \phi$$

$$(2)^2: \quad 0 = v_1^2 \sin^2 \theta - 2 v_1 v_2 \sin \theta \sin \phi + v_2^2 \sin^2 \phi$$

$$(1)^2 + (2)^2: \quad v_0^2 = v_1^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + v_2^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)$$

$$+ 2 v_1 v_2 (\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\cos(\theta + \phi)}$$

→ Reordenando, nos queda

$$(4) \quad U_0^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos(\theta + \phi)$$

→ De la ecuación de energía tenemos que

$$(3) \quad U_0^2 = U_1^2 + U_2^2$$

→ Reemplazo en (4)

$$U_1^2 + \cancel{U_2^2} = U_1^2 + \cancel{U_2^2} + 2U_1U_2 \cos(\theta + \phi)$$

$$0 = \cancel{2U_1U_2} \cos(\theta + \phi) \quad / \text{simplifico } 2U_1U_2$$

$$0 = \cos(\theta + \phi) \quad \cos(90) = 0$$

$$\theta + \phi = 90 \Rightarrow \boxed{\phi = 90 - \theta}$$

→ Otra forma: Con producto punto.

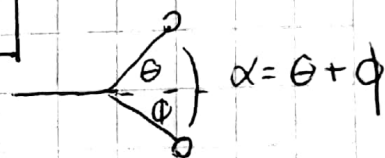
◦ Misma ecuación de energía: $V_0^2 = V_1^2 + V_2^2$

◦ Es bimos el momentum de forma vectorial

$$m\vec{V}_0 = m\vec{V}_1 + m\vec{V}_2 \quad / \quad ||^2$$

$$m^2 (\vec{V}_0 \cdot \vec{V}_0) = m^2 (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1) + m^2 (\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2) + 2m^2 (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)$$

★



→ Recordemos que

$$\vec{V} \cdot \vec{a} = |\vec{V}| \cdot |\vec{a}| \cos(\alpha), \quad \alpha \text{ ángulo entre los vectores}$$

Y si hago prod. punto de un vector por si mismo, el ángulo entre ellos es cero.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \cos(0) = a^2$$

→ Entonces! Reescribiendo ★

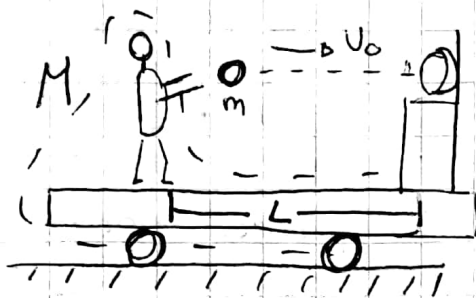
$$V_0^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1 V_2 \cos(\theta + \phi)$$

→ Usando Ecuación

$$V_1^2 + V_2^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1 V_2 \cos(\theta + \phi) \rightarrow \text{misma expresión encontrada}$$

$$\cos(\theta + \phi) = 0 \Rightarrow \theta + \phi = 90 \Rightarrow \boxed{\phi = 90 - \theta}$$

P31



- Conjunto persona - carro tiene masa M
- Bolita masa m
- Despreciamos mov vertical

a) Determinar tiempo transcurrido hasta encestar

- Cons. Momentum

$$0 = m v_0 + M V \quad V = \text{velocidad carro-persona}$$

$$V = -\frac{m}{M} v_0$$

→ Bolita y carro se mueven en sentidos opuestos. Existe una velocidad relativa entre ellos.

→ Si ponemos el eje, fijo en la bolita (como que no se moviera), ésta vería el carro acercarse con velocidad, más la velocidad del carro en sí.

- Es decir, carro y bolita se "acercan" con velocidad

$$V = v_0 + \frac{m}{M} v_0$$

→ En general se tiene

* $\begin{array}{c} \text{O} \rightarrow V_A \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{O} \rightarrow V_B \\ B \end{array} \quad |V_{rel}| = |V_A - V_B|$

♥ $\begin{array}{c} A \\ \text{O} \rightarrow V_A \end{array} \quad V_B \leftarrow \begin{array}{c} B \\ \text{O} \end{array} \quad |V_{rel}| = |V_A + V_B|$

→ Y el signo de esta velocidad relativa, depende de en cual masa fijemos el sistema de ref., y observemos a la otra masa.

Es decir, ^{en ♥} la masa A ve que la masa B se acerca a ella con velocidad $-(V_A + V_B)$, y la masa B, percibe que A se acerca con velocidad $+(V_A + V_B)$.

→ Volviendo al problema

$$V = V_0 + \frac{m}{M} V_0 = V_0 \left(1 + \frac{m}{M} \right)$$

$$L = V_0 \left(1 + \frac{m}{M} \right) \cdot t^* \Rightarrow \boxed{t^* = \frac{L}{V_0} \left(1 + \frac{m}{M} \right)^{-1}}$$

→ Lo que avanzó la bolita

$$\Delta x_B = V_0 \cdot t^* = \frac{L}{\left(1 + \frac{m}{M} \right)^0};$$

Si: $\boxed{\frac{m}{M} \ll 1}$

Podemos tender a cero el término

→ Lo que avanzó carro

$$\Delta x_c = V t^* = - \cancel{V_0} \left(\frac{m}{M} \right) \cdot \frac{L}{\cancel{V_0} \left(1 + \frac{m}{M} \right)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta x_B = L \\ \Delta x_c = 0 \end{array}} \quad \textcircled{1}$$

→ Como es esperado, de ① se concluye que si la masa m es muy pequeña en comparación al carro, no logrará moverlo.

b) En vez de encestar, hay una colisión elástica

- Posición y velocidad final del sistema, cuando la persona recibe la pelota.

→ Conservación Momentum (inicio movimiento, después del choque)

$$0 = mV_f^m + MV_f^M \quad \boxed{V_f^M = -\frac{m}{M} V_f^m}$$

→ Conservación de energía (justo antes del choque, justo después)

$$\boxed{\frac{1}{2} m V_0^2 + \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} m V_f^m^2 + \frac{1}{2} M V_f^M^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_0^2 + \frac{1}{2} M \frac{m^2}{M^2} V^2 = \frac{1}{2} m V_f^m^2 + \frac{1}{2} M \frac{m^2}{M^2} V_f^m^2$$

$$V_0^2 \left(1 + \frac{m}{M} \right) = V_f^m^2 \left(1 + \frac{m}{M} \right) \quad \boxed{V_0^2 = V_f^m^2}$$

→ Esto quiere decir, que el módulo de la velocidad final de la pelota (V_f^m) es igual al módulo de su velocidad inicial.

→ Esto último quiere decir, que el movimiento va a ser simétrico!

Si se devuelve con la misma velocidad que llegó, la pelota tardará lo mismo en llegar a la persona, que lo que se demoró en llegar a la cesta.

→ Al llegar a la persona, (en la misma posición con la que partió el movimiento) ambas masas (m y M) vuelven a juntarse, por lo que se detiene el movimiento)

Si el origen está en la persona al inicio del mov:

$$X_f^m = 0$$

y para diferenciar un poco al carro, tendremos que la posición final de la canasta es

$$X_f^{\text{canasta}} = L$$