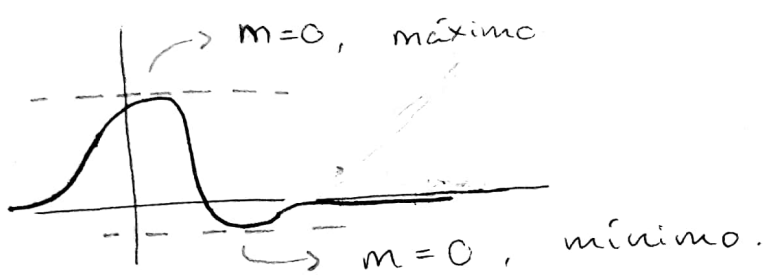


P1 Posición c/r al tiempo de un auto viene dada por:

$$X(t) = 6t^3 - 9t^2 + 15t + 24$$

i) Encuentre los puntos donde la velocidad es mínima y máxima.

ii) Para encontrar el máximo de una función, la derivamos y buscamos los puntos (los t) en los que la derivada se haga cero.



* Lo que nos piden maximizar es la velocidad, entonces primero tenemos que encontrar la velocidad, y después derivarla e igualarla a cero.

Habíamos dicho que $V = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, pero de forma precisa se tiene que $V = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

* Entonces para sacar la velocidad, derivamos la función posición!

$$\frac{dX(t)}{dt} = 6 \cdot (3) t^{(3-1)} - 9 \cdot (2) t^{2-1} + 15 \cdot (1) t^{(1-1)} + \frac{d}{dt}(24)^0$$

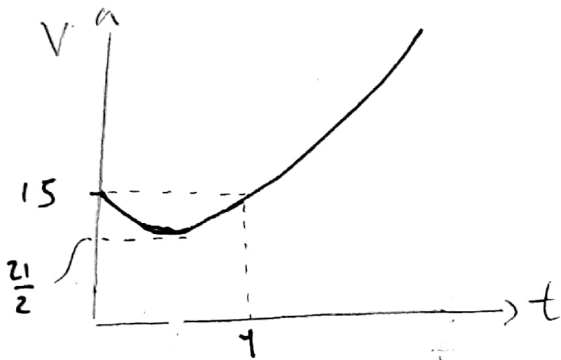
$$\boxed{\dot{X}(t) = 18t^2 - 18t + 15 = V(t)} \rightarrow \text{Esta es la velocidad!}$$

* Para graficar la velocidad, veamos que $V(0) = 15$

$$V(t) = 18t^2 - 18t + 15 \rightarrow \text{Crece exponencialmente.}$$

• Notemos que para $t \in (0, 1)$ $t^2 < t$. Es más, $V(0) = V(1) = 15$

• Entonces el gráfico queda



$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{2}\right) &= 18 \cdot \frac{1}{4} - 18 \cdot \frac{1}{2} + 15 \\ &= 15 - \frac{18}{4} \\ \frac{42}{4} &= \frac{21}{2} \end{aligned}$$

ii) Para encontrar los puntos donde $V(t)$ es mínima y máxima, igualamos su derivada a cero.

$$\frac{dV}{dt} = 18 \cdot 2t - 18 \Rightarrow \frac{d}{dt} V = \frac{d}{dt} (\dot{x}) = \ddot{x} = \boxed{\vec{a} = 36t - 18}$$

$$\vec{a} = 0 \Rightarrow 0 = 36t - 18 \Leftrightarrow \boxed{t = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}}$$

* Esto indica que en $t = 0,5$ s, la velocidad tuvo un mínimo (como se esperaba del gráfico). La velocidad crece de manera exponencial, no tiene un máximo definido.

iii) Un segundo vehículo se mueve según $x(t) = \sin 4t$

¿Cuál tiene mayor y menor rapidez?

Auto 1 $V(t) = 18t^2 - 18t + 15$

Auto 2 $x(t) = \sin(4t)$ $\frac{d}{dt}(x(t)) = \cos(4t) \cdot 4 \Rightarrow V(t) = 4 \cos(4t)$

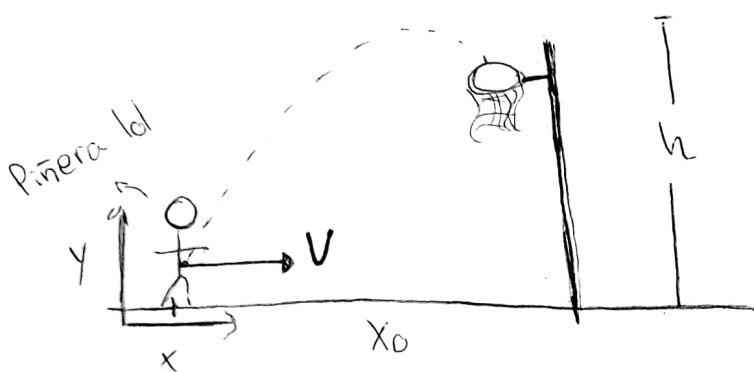
Coseno toma valores entre $(-1, 1)$, entonces la velocidad del auto, $\frac{dx}{dt}$, toma valores entre

$(-4, 4)$, y su rapidez entre $(0, 4)$ $\text{rapidez} = |\text{Velocidad}|$

* Entonces claramente el primer auto tiene mayor rapidez.

PZ

SL



* Que no los confunda mi feo dibujo!
 Vamos a despreciar la altura de Píñera, entonces necesitamos encontrar la componente de la velocidad en y (puesto que nos dan la componente en x), tal que la pelota recorra X_0 en x, y h en y.

→ Si queremos relacionar posiciones con la velocidad en los ejes, usamos la ecuación de itinerario.

$$X(t) = X_0^0 + V_{ox} \cdot t \Rightarrow \boxed{X(t) = V \cdot t} \quad (1)$$

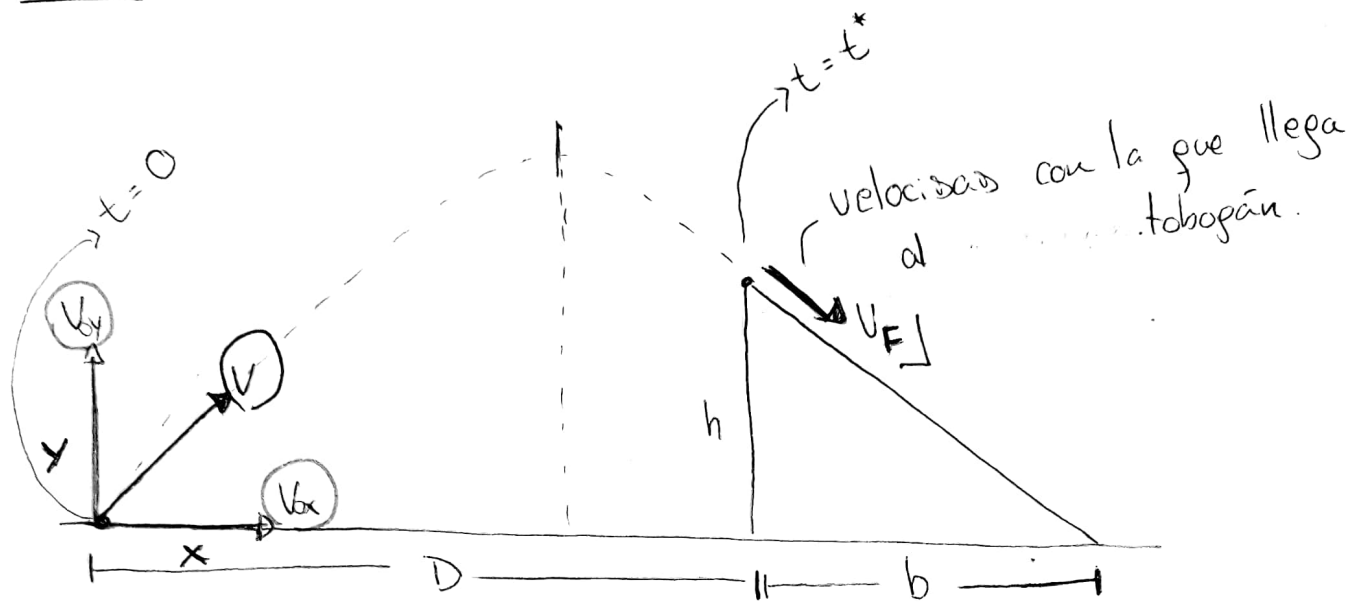
$$Y(t) = Y_0^0 + V_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \boxed{Y(t) = V_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2} \quad (2)$$

Imponiendo $t^* = \text{tiempo encesta}$, se tiene que
 $\Rightarrow X(t^*) = X_0 = V \cdot t^*$ (*) $\Rightarrow t^* = \frac{X_0}{V}$ Como V y X_0 conocidos, t^* conocido

Evaluando (2) en t^* , y reemplazando (*)

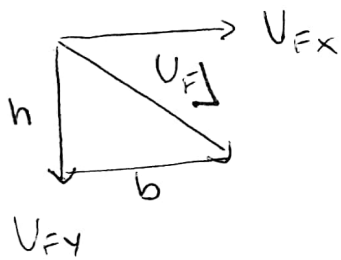
$$Y(t^*) = \boxed{h = V_{oy} \left(\frac{X_0}{V} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{X_0}{V} \right)^2} \Rightarrow \boxed{V_{oy} = \frac{h - \frac{1}{2} g \left(\frac{X_0}{V} \right)^2}{\left(\frac{X_0}{V} \right)}}$$

P3



- La condición para que la bengala llegue paralela al tobogán, es que la "pendiente" de la velocidad, sea igual a la del tobogán.

- Podemos establecer la sgte relación



$$\frac{V_{Fy}}{V_{Fx}} = -\frac{h}{b}$$

- ★ Volviendo al principio del movimiento... Una bengala es lanzada con una velocidad inicial (V) .
- Vamos a trabajar la velocidad, por sus componentes (V_x) y (V_y) (y esto, es lo que nos piden determinar)

* Como tenemos puesto el origen de referencia en el lugar donde se dispara la bengala, y usamos que la velocidad inicial en X y en Y, es V_{0x} y V_{0y} respo.

Las E.C.C DE MOV QUEDAN

$$X(t) = V_{0x} \cdot t \quad (1)$$

$$Y(t) = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

$$V_y(t) = V_{0y} - g t \quad (3)$$

Defina la velocidad en el eje y, en función del tiempo, porque está afectada por $\vec{g}$ (aceleración). Como es usual, la velocidad en X es constante!

→ Notamos que en la relación que definimos antes:

$$-\frac{h}{b} = \frac{V_{fy}}{V_{fx}}$$

$$V_{fx} = V_{0x}$$

$$V_y(t^*) = V_{fy} \Rightarrow$$

$$-\frac{h}{b} = \frac{V_{fy}}{V_{0x}} \quad (4)$$

* Si imponemos que en $t=t^*$, la bengala llegue a la esquina del tobogán.

$$X(t^*) = D = V_{0x} \cdot t^* \quad (1)$$

$$Y(t^*) = h = V_{0y} \cdot t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} \quad (2)$$

$$V_y(t^*) = V_{fy} = V_{0y} - g t^* \quad (3)$$

$$V_{fy} = -\frac{h}{b} V_{0x} \quad (4)$$

solo reordené (4), no impone t^*

• Ahora, antes de tirarse a hacer la matracaca, deténgase un momento, vean las ecuaciones y piensen.

Tenemos 4 incógnitas (V_{ox} , V_{oy} , V_{fy} , t^*) y 4 ecc.

→ Las dos que no nos interesan (V_{fy} , t^*) voy a querer despejarlas en función de V_{ox} , V_{oy} . Y de ahí, jugar con las ecuaciones.

Primero: De ① despejo t^* . $\Rightarrow$ $t^* = \frac{D}{V_{ox}}$ (*)

Luego reemplazo en ③ y me queda:

$$V_y(t^*) = V_{fy} = V_{oy} - g \cdot \left(\frac{D}{V_{ox}} \right) (**)$$

* Como tenemos otra expresión para V_{fy} (en la ecc ④), y queremos deshacernos de V_{fy} , igualamos las expresiones.

$$(**) = (4)$$

$$V_{oy} - g \cdot \frac{D}{V_{ox}} = -\frac{h}{b} V_{ox}$$

(***) $\rightarrow$ Solo depende de V_{ox} y V_{oy} !

* La única ecuación que nos queda en términos de t^* es ②, entonces, reemplazamos (*) en ② y queda.

$$h = V_{oy} \cdot \frac{D}{V_{ox}} - \frac{1}{2} g \frac{D^2}{V_{ox}^2}$$

(****) $\rightarrow$ Solo depende de V_{ox} y V_{oy} !

★ Ahora es momento de jugar. Tenemos 2 incógnitas y dos ecuaciones, entonces HAY SOLUCIÓN.
Pero nadie dijo que sería fácil llegar a ella... pero si las miramos bien...

$$\boxed{V_{oy} - \frac{gD}{V_{ox}} = -\frac{h}{b} V_{ox}} \quad \text{a)} \quad \boxed{h = \frac{V_{oy}}{V_{ox}} D - \frac{1}{2} g \frac{D^2}{V_{ox}^2}} \quad \text{b)}$$

♥ Es el único término, en las dos ecuaciones, que comporte a V_{oy} y a V_{ox} . Y en a) solo hay un término que tiene V_{oy} ☹️ Entonces como que apaña esto:

→ Multiplico a) por $\left(\frac{D}{V_{ox}}\right)$ y queda

$$V_{oy} \cdot \left(\frac{D}{V_{ox}}\right) - \frac{gD}{V_{ox}} \left(\frac{D}{V_{ox}}\right) = -\frac{h}{b} V_{ox} \left(\frac{D}{V_{ox}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_{oy}}{V_{ox}} \cdot D = \frac{gD^2}{V_{ox}^2} - \frac{hD}{b} = \text{♥}}$$

→ Corazón está en función de V_{ox} !!
Si reemplazamos...

→ Reemplazo ♥ en b) y despejo V_{ox} .

$$h = \left(\frac{gD^2}{V_{ox}^2} - \frac{hD}{b} \right) - \frac{1}{2} g \frac{D^2}{V_{ox}^2} \Rightarrow h = \frac{1}{2} g \frac{D^2}{V_{ox}^2} - \frac{hD}{b}$$

$$\frac{h(b+D)}{b} \cdot \frac{2}{gD^2} = \frac{1}{V_{ox}^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{ox} = \sqrt{\frac{bgD^2}{2h(b+D)}}$$

→ Por último, Si reemplazamos U_{ox} en a)

$$U_{oy} = \frac{gD}{U_{ox}} - \frac{h}{b} U_{ox}, \quad U_{ox} = D \sqrt{\frac{gb}{2h(b+D)}} \quad \frac{1}{U_{ox}} = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{2h(b+D)}{gb}}$$

$$U_{oy} = \frac{gD}{D} \sqrt{\frac{2h(b+D)}{gb}} - \frac{h \cdot D}{b} \sqrt{\frac{gb}{2h(b+D)}} \rightarrow \text{Esta ya es una exp. suficiente para } U_{oy}.$$

→ Si la quieren dejar bonita, miren las cosas que hay en común.

$$U_{oy} = \sqrt{\frac{g^2 2h(b+D)}{gb}} - D \sqrt{\frac{h^2 gb}{b^2 2h(b+D)}} \quad > \text{la dejé a guera, pq no estaba en la otra raíz}$$

$$U_{oy} = \sqrt{\frac{gh}{b} \cdot \frac{2(b+D)}{2(b+D)}} - D \sqrt{\frac{gh}{2b(b+D)}} \quad \text{FAMOSO } (=1) \quad \text{NIQUITA NIRONZ}$$

$$U_{oy} = 2(b+D) \sqrt{\frac{gh}{2b(b+D)}}$$