Pauta Auxiliar 1

Ordenes de Magnitud y Cinemática I

Profesor: Valentino Gonzalez
Auxiliares: Hojin Kang, Leonardo Leiva y Camila Rearte

1. **i)** Para poder encontrar la relación dependiente de $G,\ h$ y c que tenga unidades de longitud, tenemos que encontrar los coeficientes $a,\ b,\ c$ que cumplan la siguiente ecuación:

$$G^a \times h^b \times c^c = [L] \tag{1}$$

Donde $[L]$ indica que son unidades de longitud.

Para lo anterior es necesario que el producto de las dimensiones cumpla la relación, para lo cual transformamos cada una de las variables en sus respectivas dimensiones, a partir de lo cual se tiene que:

$$(L^3T^{-2}M^{-1})^a \times (LT^{-1})^b \times (L^2MT^{-1})^c = L \tag{2}$$

Lo anterior se puede reordenar para obtener que:

$$L^{3a+b+2c} \times T^{-2a-b-c} \times M^{-a+c} = L^1 \times T^0 \times M^0 \tag{3}$$

A partir de lo anterior obtenemos un sistema de 3 ecuaciones que viene dado por:

$$3a + b + 2c = 1 \tag{4}$$
$$-2a - b - c = 0 \tag{5}$$
$$-a + c = 0 \tag{6}$$

Podemos sumar (4) y (5) para obtener:

$$a + c = 1 \tag{7}$$

Y luego sumar (6) y (7) para obtener:

$$2c = 1 \implies c = \frac{1}{2} \tag{8}$$

A partir de lo anterior obtenemos el valor de c. Reemplazando este valor en la ecuación (7) obtenemos que:

$$a + \frac{1}{2} = 1 \implies a = \frac{1}{2} \tag{9}$$

Con lo que se obtiene el valor de a. Finalmente reemplazamos los valores de a y c en la ecuación (4) para obtener:

$$3 \times \frac{1}{2} + b + 2 \times \frac{1}{2} = 1 \implies b = -\frac{3}{2} \tag{10}$$

Ahora que se tienen los valores de $a,\ b$ y c podemos reemplazar en (1) para obtener:

$$\sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = [L] \tag{11}$$

Lo cual es el resultado que se esperaba. Es importante notar que la expresión anterior corresponde a la longitud de Planck, sin embargo debido a que las constantes son adimensionales, puede existir una constante que no podemos encontrar mediante este método, por lo que la expresión para la longitud de Planck nos queda:

$$l_p = K\sqrt{\frac{Gh}{c^3}} \tag{12}$$

ii) Para encontrar el tiempo de Planck, se realiza el mismo procedimiento anterior, sin embargo ahora la ecuación a resolver es:

$$G^a \times h^b \times c^c = [T] \tag{13}$$

Debido a que el procedimiento es el mismo, no se repite. Sin embargo se deja la respuesta que es:

$$t_p = K\sqrt{\frac{Gh}{c^5}} \tag{14}$$

iii) Se realiza el mismo procedimiento que en i) y ii), sin embargo la ecuación para encontrar la masa de Planck corresponde a:

$$G^a \times h^b \times c^c = [M] \tag{15}$$

Y la respuesta obtenida será:

$$m_p = K\sqrt{\frac{ch}{G}} \tag{16}$$

iv) Para realizar las estimaciones que se piden aproximamos los valores de las constantes como:

$$G = 6{,}67 \times 10^{-8}[\frac{cm^3}{s^2 gr}] \approx 10^{-7}[\frac{cm^3}{s^2 gr}] \tag{17}$$

$$c = 3 \times 10^{10}[\frac{cm}{s}] \approx 10^{10}[\frac{cm}{s}] \tag{18}$$

$$h = 1{,}054 \times 10^{-27}[\frac{cm^2 gr}{s}] \approx 10^{-27}[\frac{cm^2 gr}{s}] \tag{19}$$

Utilizando la aproximación anterior para la expresión de la longitud de Planck obtenida en (12), y considerando que el valor de K es despreciable (usamos $K = 1$), tenemos que:

$$l_p \approx \sqrt{\frac{10^{-7}[\frac{cm^3}{s^2 gr}]10^{-27}[\frac{cm^2 gr}{s}]}{(10^{10}[\frac{cm}{s}])^3}} = 10^{-32}[cm] \tag{20}$$

Lo cual es la estimación para el valor de l_p. Realizando el mismo procedimiento para t_p y m_p obtenemos que:

$$t_p \approx 10^{-42}[s] \tag{21}$$

$$m_p \approx 10^{-5}[gr] \tag{22}$$

2. **i)** Para calcular la cantidad total de combustible que se consume en el trayecto debemos calcular el tiempo total que se demora el cohete el viaja la distancia D_s. Para lo anterior separamos el trayecto en dos tramos, el primer cuarto del trayecto es un MRUA con aceleración a_c, y el resto es un MRU con velocidad constante (la cual corresponde a la velocidad adquirida en el primer cuarto del trayecto).

Primera parte: MRUA

Debido a que es un MRUA debemos usar la ecuación itinerario correspondiente a un MRUA, la cual es la siguiente:

$$x_f = x_0 + v_0 \times t + \frac{1}{2} a \times t^2 \tag{23}$$

Nos tomamos el origen del movimiento en la tierra, donde parte el trayecto, por lo cual $x_0 = 0$. Además como el cuerpo se encuentra en reposo en el instante inicial tenemos que $v_0 = 0$. Además la aceleración es a_c, y sabemos que la primera parte del trayecto termina en $x_f = \frac{D_s}{4}$. Finalmente llamaremos al tiempo que toma esta parte del trayecto t_1. Reemplazando lo anterior obtenemos que:

$$\frac{D_s}{4} = \frac{1}{2} a_c \times t_1^2 \implies t_1 = \sqrt{\frac{D_s}{2a_c}} \tag{24}$$

Además como tenemos el tiempo que se demora en el primer cuarto del trayecto, podemos calcular la velocidad con la que termina el trayecto mediante:

$$v_f = v_0 + a \times t \tag{25}$$

Recordamos que $v_0 = 0$, $a = a_c$ y $t = t_1$, con lo que obtenemos que:

$$v_f = a_c \times t_1 \implies v_f = \sqrt{\frac{D_s a_c}{2}} \tag{26}$$

Segunda parte: MRU

Como se mencionó previámente, la segunda parte de la trayectoria corresponde a un MRU, con velocidad constante v_f calculada en (26). Para encontrar el tiempo podemos utilizar la ecuación itinerario de (23), pero ahora con $a = 0$ (debido a que es un MRU), y con $v_0 = v_f$.

La posición en la que termina el movimiento corresponde a $x_f = D_s$ (ya que el trayecto termina cuando se llega a Saturno), y sabemos que el movimiento empieza en $x_0 = \frac{D_s}{4}$, que es donde terminó la primera parte del trayecto. Finalmente al tiempo que se demora en este trayecto le llamaremos t_2. Considerando lo anterior tenemos la siguiente ecuación:

$$D_s = \frac{D_s}{4} + v_f \times t_2 \implies t_2 = \frac{3D_s}{4v_f} = \sqrt{\frac{9D_s}{8a_c}} \tag{27}$$

Finalmente como sabemos que el cohete consume L litros de combustible por segundo, podemos encontrar el consumo total de combustible c_{total} como:

$$c_{total} = L \times t_{total} = L \times (t_1 + t_2) = L \times (\sqrt{\frac{D_s}{2a_c}} + \sqrt{\frac{9D_s}{8a_c}}) \tag{28}$$

ii) Para aproximar el gasto de combustible del cohete podemos realizar las siguientes aproximaciones:

$$D_s \approx 10^9[km] = 10^{12}[m] \tag{29}$$

$$a_c \approx 1[\frac{m}{s^2}] \tag{30}$$

Reemplazando en la ecuación (28) obtenemos que:

$$c_{total} = 5[\frac{L}{s}](\sqrt{\frac{10^{12}[m]}{2[\frac{m}{s^2}]}} + \sqrt{\frac{9 \times 10^{12}[m]}{8[\frac{m}{s^2}]}}) \approx 5[\frac{L}{s}](\sqrt{10^{12}[s^2]} + \sqrt{10^{12}[s^2]}) = 10^7[L] \tag{31}$$

Para estimar la cantidad de combustible que gasta un auto en un día, consideramos que se recorren $d = 40[km]$ diarios, y que el auto consume $L_{auto} = 10[\frac{L}{km}]$. A partir de lo anterior tenemos que:

$$c_{diario} = \frac{d}{L_{auto}} = 4[L] \tag{32}$$

Ahora para calcular el gasto anual, basta multiplicar por los 365 días del año, con lo que se obtiene:

$$c_{anual} = 4[L] \times 365 = 1460[L] \tag{33}$$

Lo anterior es del orden de $10^3[L]$. Si sacamos la proporción con respecto al consumo del cohete tenemos que:

$$\mu = \frac{10^7[L]}{10^3[L]} = 10^4 \tag{34}$$

Es decir el cohete consume 10^4 (10.000) veces lo que consume el auto en un año. Es decir mucho mas :D

3. **i)** Para resolver este tipo de problemas es importante recordar que para que dos cuerpos se encuentren es necesario que estén en la misma posición (x) en el mismo instante (t).

   Para hacer esto vamos a plantear la ecuación de movimiento de Alicia (A) y la de Bernardo (B):

$$A: \ x_{fA} = x_{0A} + v_A \times t \tag{35}$$

$$B: \ x_{fB} = x_{0B} + v_{0B} \times t + \frac{1}{2} a_B \times t^2 \tag{36}$$

   Lo anterior se debe a que Alicia se mueve según un MRU, mientras que Bernardo se mueve según un MRUA.

   Nos tomaremos el origen en la posición inicial de Alicia, por lo que tenemos que $x_{0A} = 0$, y sabemos que la velocidad de Alicia $v_A = 9[\frac{m}{s}]$ por enunciado.

   Respecto a Bernardo, sabemos que la posición inicial de Bernardo es $40[m]$ adelante de la posición inicial de Alicia, por lo que tenemos que $x_{0B} = 40[m]$. En el instante incial la velocidad de Bernardo es 0, por lo que $v_{0B} = 0$, y finalmente la aceleración de Bernardo viene dada por el enunciado y corresponde a $a_B = 0{,}9[\frac{m}{s^2}]$.

   Reemplazando lo anterior en las ecuaciones (35) y (36) obtenemos:

$$A: \ x_{fA} = 9[\frac{m}{s}] \times t \tag{37}$$

$$B: \ x_{fB} = 40[m] + \frac{1}{2} 0{,}9[\frac{m}{s^2}] \times t^2 \tag{38}$$

Para que Alicia y Bernardo se encuentren es necesario que tengan la misma posición, por lo tanto:

$$9[\frac{m}{s}] \times t = 40[m] + \frac{1}{2}0{,}9[\frac{m}{s^2}] \times t^2 \implies 40[m] - 9[\frac{m}{s}] \times t + \frac{1}{2}0{,}9[\frac{m}{s^2}] \times t^2 = 0 \quad (39)$$

La ecuación anterior corresponde a una ecuación cuadrática, la cual se puede resolver utilizando:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (40)$$

A partir de lo anterior obtenemos dos resultados (lo cual se espera de una ecuación cuadrática):

$$t_1 = 6.\overline{6}[s] \quad (41)$$

$$t_2 = 13.\overline{3}[s] \quad (42)$$

De los dos resultados, tenemos que el primero t_1 corresponde a cuando Alicia alcanza a Bernardo, mientras que t_2 corresponde a cuando Bernardo vuelve a alcanzar a Alicia (después de que ella lo pasa). Bernardo vuelve a pasar a Alicia, ya que tienen una aceleración constante, lo cual provoca que su velocidad aumente sin limite, por lo cual su velocidad alcanzará un valor mayor que el de Alicia y por ende la alcanzará.

Esta parte del problema nos muestra que no siempre es suficiente con solo resolver el problema desde el punto de vista matemático, sino que a veces es necesario incorporar el análisis físico para llegar al resultado final. Así la respuesta a esta parte del problema es $t_1 = 6.\overline{6}[s]$.

ii) Como mencionamos previámente, t_2 corresponde al tiempo en el cual Bernardo vuelve a alcanzar a Alicia, por lo cual el tiempo que Alicia permanece frente a Bernardo corresponde a $\Delta t = t_2 - t_1 = 6.\overline{6}[s]$.

iii)

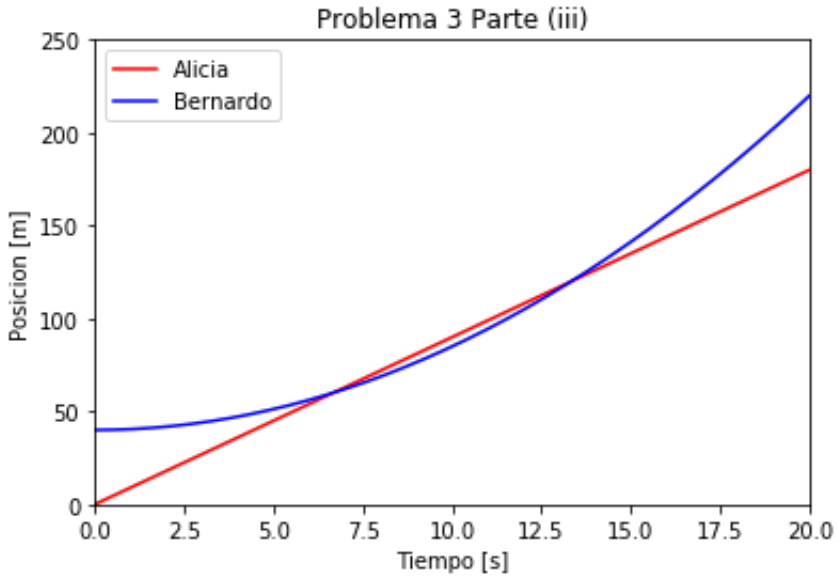

Figura 1: P3 (iii)

4. En este problema no conocemos a que distancia se encuentra en tren del puente, por lo que çrearemosün parámetro d que represente esta distancia. Sin embargo nuestro resultado final no puede quedar en función de d, ya que nosotros nos lo dimos, a esto lo llamamos una *Variable Auxiliar*.

   Además la variable cuyo valor queremos encontrar es v_p que es la velocidad de la persona. Para resolver el problema lo separaremos en dos partes, el caso en que la persona corre hacía A, y el caso en el que corre hacia B.

Persona corre hacia A

Tomaremos el origen donde parte el tren. En esta parte del problema tenemos las siguientes ecuaciones:

$$Tren: \ x_{tren} = v_t \times t \tag{43}$$
$$Persona: \ x_{persona} = d + x - v_p \times t \tag{44}$$

La velocidad de la persona v_p tiene un $-$ antes, ya que nos tomas el eje hacia la derecha, pero la velocidad de la persona es hacia la izquierda. Recordemos que ambos se encuentran en $x = d$, por lo que a partir de (43) podemos despejar que:

$$d = v_t \times t \implies t = \frac{d}{v_t} \tag{45}$$

Este es el tiempo en el que ambos se encuentran (en $x = d$). Podemos reemplazar este tiempo en (44) para obtener:

$$d = d + x - v_p \times \frac{d}{v_t} \implies d = \frac{x \times v_t}{v_p} \tag{46}$$

A partir de lo anterior obtenemos una ecuación que relaciona nuestras dos incógnitas d y v_p.

Persona corre hacia B

Para esta parte de problema, nos tomamos el mismo eje y origen que en la primera parte. Con lo anterior obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$Tren: \ x_{tren} = v_t \times t \tag{47}$$
$$Persona: \ x_{persona} = d + x + v_p \times t \tag{48}$$

OJO: AHORA LA VELOCIDAD DE LA PERSONA TIENE UN +, YA QUE ESTA SE MUEVE HACIA LA DERECHA.

Ahora sabemos que se encuentran en B, es decir cuando $x = d + L$. Luego a partir de (47) tenemos que:

$$d + L = v_t \times t \implies t = \frac{d + L}{v_t} \tag{49}$$

Sabemos que para que se encuentren deben encontrarse en el mismo tiempo, el cual corresponde al tiempo encontrado en (49). Además la persona se debe encontrar en $d + L$ en ese instante, por lo que podemos reemplazar esto en (48) para obtener:

$$d + L = d + x + v_p \times \frac{d + L}{v_t} \tag{50}$$

En (50) podemos reemplazar la expresión para d que encontramos en (46) con lo que tenemos:

$$L = x + v_p \times \frac{\frac{x \times v_t}{v_p} + L}{v_t} \implies L = x + x + \frac{L \times v_p}{v_t} \implies v_p = \frac{v_t \times (L - 2x)}{L} \tag{51}$$

Con lo que encontramos el valor de v_p que se pide en el problema. Para responder la segunda parte del problema, podemos encontrar el valor de d, a partir de (46), con lo que se obtiene:

$$d = \frac{x \times L}{L - 2x} \tag{52}$$

Claramente a partir de (52) se debe cumplir que $L - 2x > 0 \implies L > 2x$, para que d sea mayor a 0 y no se indefina. Lo anterior es una condición para que el problema tenga solución. Además se tiene que es un resultado lógico, ya que si $L < 2x$ tendremos

que la persona se encuentra en la mitad derecha del puente, lo cual no tiene sentido (piensenlo :D)