

Pauta Auxiliar 4 - Cinemática 2D

Profesora: Patricia Sotomayor C.

Auxiliares: Luna Alarcón Merino - Alan Figueroa Moraga - Edgardo Rosas Cárcamo

11-04-2018

P1.

- a) Aplicaremos la definición de velocidad media y rapidez media. Sabemos que $\Delta t = \tau = 2[s]$, La distancia recorrida entre A y B está dada por $\Delta s = \frac{2\pi(2m)}{2} = 2\pi[m]$. Por otro lado el desplazamiento será $\Delta r = 5m\hat{j} - 1m\hat{j} = 4[m]\hat{j}$.

$$\boxed{\vec{v}_m = 2 \left[\frac{m}{s} \right] \hat{j} \wedge v_m = \pi \left[\frac{m}{s} \right]}$$

- b) Si la rapidez es constante sobre una recta, entonces coincide con la rapidez media en dicha recta. $\Delta s = 4[m]$ Entonces $1 \left[\frac{m}{s} \right] = \frac{4[m]}{\tau}$

$$\boxed{\tau = 4s}$$

- c) Como el gato da una vuelta completa, ha recorrido $\Delta s = (4\pi + 8)[m]$. dar una vuelta completa implica que $\vec{r}_i = \vec{r}_f = 1\hat{j}$, por lo que $\Delta \vec{r} = 0$

P2. Recolectando datos del problema(usamos el sistema de referencia de la figura): $x_0 = y_0 = 0$; $v_y^o = v_0 \sin(\phi)$; $v_x^o = v_0 \cos(\phi)$; $a_y = -g$; $a_x = 0$ así, las ecuaciones por ejes nos quedarán como

$$y(t) = v_0 \sin(\phi)t - \frac{gt^2}{2} \quad (1)$$

$$x(t) = v_0 \cos(\phi)t \quad (2)$$

Supondremos que en τ la pelota toca el piso a una distancia D . Esto es $D = v_0 \cos(\phi)\tau$, o equivalentemente

$$\tau = \frac{D}{v_0 \cos(\phi)}$$

reemplazando τ en la ecuación (1):

$$y(\tau) = v_0 \sin(\phi) \left(\frac{D}{v_0 \cos(\phi)} \right) - \frac{g \left(\frac{D}{v_0 \cos(\phi)} \right)^2}{2}$$

Si la pelota toca el piso en τ , $y(\tau) = 0$

$$0 = D \left(\tan(\phi) - \frac{Dg}{2v_0^2 \cos^2(\phi)} \right)$$

Con esto nos queda una ecuación para D : La solución $D = 0$ no nos sirve. entonces

$$D = \frac{2v_0^2 \cos^2(\phi) \tan(\phi)}{g} \underbrace{=}_{\text{trigonometría}} \frac{v_0^2}{g} \sin(2\phi)$$

Sabemos que $0 \leq \sin(x) \leq 1$ si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

queremos que $\sin(x)$ sea máximo, es decir $\sin(x) = 1$, esto se logra en $x = \frac{\pi}{2}$

Con esto, volviendo a nuestra ecuación para D , necesitamos que $2\phi_m = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\phi_m = \frac{\pi}{4}}$$

La altura máxima se alcanza cuando $v_y(t) = 0$ supondremos que esto ocurre en un tiempo τ_0

$$v_y(\tau_0) = v_0 \sin(\phi) - g\tau_0 = 0$$

$$\boxed{\tau_0 = \frac{v_0 \sin(\phi)}{g}}$$

Luego la altura en ese instante estará dada por $H_{max} = y(\tau_0)$

$$\boxed{H_{max} = v_0 \sin(\phi) \left(\frac{v_0 \sin(\phi)}{g} \right) - \frac{g \left(\frac{v_0 \sin(\phi)}{g} \right)^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2(\phi)}{2g}}$$

P3. Veamos primeramente las relaciones geometricas.

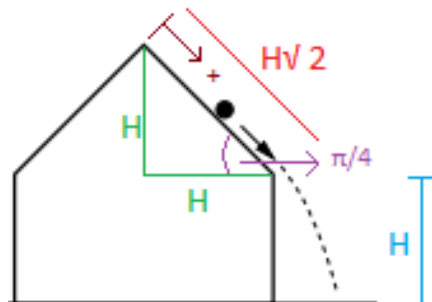


Figure 1: Problema 3

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}g$$

Necesitamos saber con que velocidad parte la bola cuando se despega del techo, para ello usaremos la parte del techo como un movimiento unidimensional. con el sistema de referencia indicado en la figura 1. $x(t) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} g t^2 = \frac{\sqrt{2} g t^2}{4}$. Suponemos que en $\bar{t}$ se llega al final de ese tramo, es decir $x(\bar{t}) = H\sqrt{2}$

$$\frac{\sqrt{2} g \bar{t}^2}{4} = H\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\bar{t} = 2\sqrt{\frac{H}{g}}}. \text{ La expresión para la velocidad es } v(t) = \sqrt{2} \frac{gt}{2}$$

Reemplazando el tiempo $\bar{t}$ en la velocidad tendremos la velocidad final de este tramo, y con ello el inicial del movimiento parabolico.

$$v(\bar{t}) = \sqrt{2Hg}$$

Obtenido esto, pasaremos a la segunda parte del problema, estableciendo como siempre, nuestro sistema de referencia

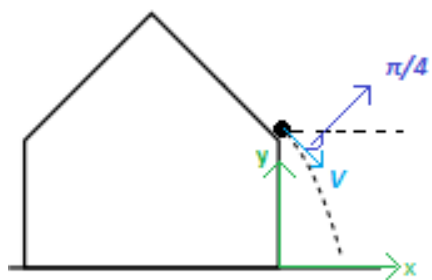


Figure 2: Problema 3

Con esto

$$y(t) = H - \sqrt{gH}t - \frac{gt^2}{2} \quad (3)$$

$$x(t) = \sqrt{gH}t \quad (4)$$

Calcularemos el tiempo τ que se tarda la pelota en llegar al suelo, esto es $y(\tau) = 0$, lo cual corresponde a una ecuación cuadrática.

$$\tau = \frac{-\sqrt{gH} \pm \sqrt{gH + 2gH}}{g} = \frac{\sqrt{gH}(-1 \pm \sqrt{3})}{g}$$

tomamos la solución positiva y reemplazamos en (4)

$$x(\tau) = H(\sqrt{3} - 1)$$

Como nuestro sistema de referencia en x está situado justo en la pared $x(\tau)$ corresponde a la distancia buscada.

Resumen

Profesora: Patricia Sotomayor C.

Auxiliares: Luna Alarcón Merino - Alan Figueroa Moraga - Edgardo Rosas Cárcamo

11-04-2018

1 Trigonometría

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\cotan(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

2 Variables cinemáticas

Rapidez media: $\Delta s :=$ distancia recorrida

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (5)$$

Velocidad media: $\Delta \vec{r} :=$ desplazamiento

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (6)$$

Aceleración:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (7)$$

Velocidad instantánea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (8)$$

rapidez instantánea:

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (9)$$

3 Ecuaciones cinemáticas 2D

Gracias al principio de superposición:
 $\vec{r} :=$ posición

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \quad (10)$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} \quad (11)$$

$$\vec{a}(t) = a_y(t)\hat{j} \quad (12)$$

Table 1: Cinemática por coordenadas 1D

	eje y	eje x
Posición	$y(t) = y_0 + v_y^\circ t + \frac{a_y t^2}{2}$	$x(t) = x_0 + v_x^\circ t$
Velocidad	$v_y(t) = v_y^\circ + a_y t$	$v_x(t) = v_x^\circ$
Aceleración	$a_y(t) = a_y$	$a_x(t) = 0$