

Auxiliar

Ilana Mergudich T., Arniel Labrada D.

July 11, 2018

1. Decimos que un vértice v en un grafo G es crítico, si sacar a v de G (junto con todos los arcos que llegan a tal nodo) genera más de una componente conexa (es decir, el grafo deja de ser conexo).

Demuestre que todo grafo simple y conexo contiene al menos dos vértices que no son críticos.

2. La distancia entre dos nodos distintos u y v de un grafo simple $G = (V, E)$ es el largo (número de aristas) del camino más corto en G entre los nodos. El diámetro de G es la máxima distancia existente entre dos nodos distintos del grafo. Demuestre que si el diámetro de un grafo es al menos 4, entonces el diámetro de su complemento es menor o igual que 2.

3. A Sven, al igual que a muchos estudiantes del DCC, le gusta mucho un juego de cartas llamado Hearthstone TM. Tanto así que organizará un gran torneo de Hearthstone en la salita del DCC. Este torneo funcionará de la siguiente manera:

- (a) Cada persona deberá jugar una partida contra cada uno de los demás participantes del torneo.
- (b) Cada enfrentamiento termina en una victoria para alguno de los dos jugadores (No hay empates).
- (c) Luego de que todos hayan jugado entre si, el ganador será quien haya conseguido mas victorias.

Dado que a Sven le encantan los grafos, no se le ocurrió mejor idea que guardar los resultados del torneo en un grafo dirigido G . ste tendrá un nodo por cada participante, mientras que por cada partida que se haya jugado G tendrá un arco saliendo desde el nodo ganador y apuntando hacia el nodo perdedor.

Asumiendo que participarán n personas en el torneo, responda las siguientes dudas/tareas que le da Sven:

- (a) De cuántas maneras puede resultar el torneo?, es decir, De cuntas maneras podemos escribir G ?
- (b) Cuanto es la suma del grado de salida y de entrada de todos los nodos de G ?

(c) Demuestre que G siempre tendrá algún camino hamiltoniano.

Asumamos ahora que Hearthstone es un juego tan bien diseñado, que el resultado de las partidas depende solamente de la habilidad de los jugadores y no de su suerte al robar las cartas. De esta manera, si un jugador con mayor habilidad juega contra uno de menor habilidad, el primer jugador ganará siempre. Asumamos también que la habilidad de los jugadores es cuantificable y todos los participantes del torneo tendrán un nivel de habilidad distinto.

Demuestre que bajo estas condiciones siempre se cumplirán las siguientes propiedades:

- (a) G es acíclico.
- (b) Ningún par de personas tendrá la misma cantidad de victorias.
- (c) G tendrá un único camino Hamiltoniano.