CC3101 Matemáticas Discretas para la Computación

Profesor: Pablo Barceló B.

Auxiliares: Ilana Mergudich T.
Arniel Labrada D.

Fecha: Miércoles 4 de abril de 2018

Auxiliar 3

P1. Sea $X = \{x_1, \dots, x_{3n}\}$ un conjunto de $3n$ elementos ($n \geq 1$) y λ una función que asigna un entero positivo a cada elemento $x \in X$. Construya una fórmula en la lógica proposicional que sea satisficible si y sólo si existen conjuntos $Z_1, \dots, Z_n$ tales que:

- Los Z_i 's definen una partición de X ; es decir, $X = \bigcup_{1 \leq i \leq n} Z_i$ y $Z_i \cap Z_j = \emptyset$, para cada $1 \leq i < j \leq n$.
- Para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que el conjunto Z_i contiene exactamente tres elementos.
- Los elementos en cada conjunto Z_i suman lo mismo. Formalmente, existe un entero positivo t tal que para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que si $Z_i = \{a, b, c\}$ entonces $\lambda(a) + \lambda(b) + \lambda(c) = t$.

El tamaño de su fórmula debe ser a lo más $O(n^c)$, para c una constante positiva.

P2. Un grafo G es una tupla (V, E) , donde V es un conjunto de nodos y $E \subseteq V \times V$ es un conjunto de arcos. Un grafo no es dirigido si cada vez que $(a, b) \in E$, se tiene que $(b, a) \in E$. Decimos que G tiene un clique de tamaño k si existe un subconjunto de vértices de tamaño k tal que están conectados todos con todos. Demuestre que 3-SAT es reducible a Clique. Esto es, que existe un algoritmo que en tiempo polinomial toma una fórmula lógica en 3-SAT y entrega un grafo que tiene un clique de tamaño al menos n si y solamente si la fórmula es satisficible, donde n es el número de cláusulas.

P3. Sea R una relación en A . Recuerde que R^{-1} denota el inverso de la relación R ; es decir

$$R^{-1} = \{(a, b) \mid (b, a) \in R\}$$

Además, definimos a R^+ como $R^i \cup I$, para algún $i \geq 1$ (no fijo) donde $I = \{(a, a) \mid a \in A\}$ es la identidad en A .

Una relación es *euclídeana* si satisface la siguiente fórmula:

$$\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow R(y, z)).$$

Demuestre que si R es una relación en A , entonces la relación $(R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^+ \circ R)$ es simétrica, transitiva y euclídeana.