

PAUTA AUXILIAR 3

P2 REORDENAMOS:

- un literal es de la forma p o bien $\neg p$
- una cláusula es una disyunción de literales, por ejemplo: $p \vee q \vee r$
- una fórmula está en SAT si es una conjunción de cláusulas, por ejemplo

$$(p \vee q \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee s)$$
- una fórmula está en 3-SAT si está en SAT y todas sus cláusulas tienen exactamente 3 literales

$$\hookrightarrow Q \text{ está en 3-SAT} \equiv Q = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (\nu_{i1} \vee \nu_{i2} \vee \nu_{i3})$$

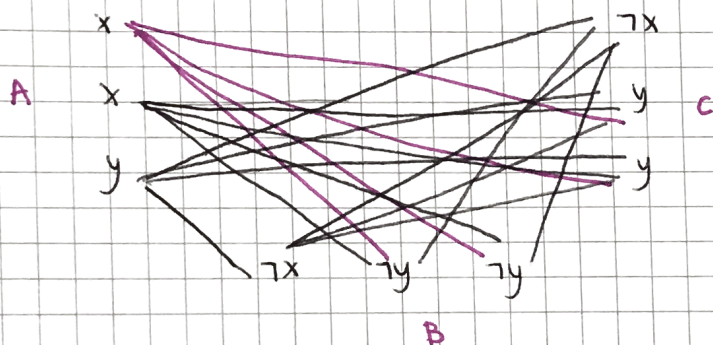
FÓRMULA EN 3-SAT A GRAFO

Para pasar de una fórmula en 3-SAT a un grafo, hacemos lo siguiente

veámoslo con un ejemplo:

$$Q = \underbrace{(x \vee x \vee y)}_A \wedge \underbrace{(\neg x \vee \neg y \vee \neg y)}_B \wedge \underbrace{(\neg x \vee y \vee y)}_C$$

cada literal es un nodo:



Luego unimos a cada nodo con todos los que no estén en su misma cláusula a menos que sea su negación

~~Se conectan los literales~~ Fijémonos por ejemplo en las líneas rosadas. La x de la primera cláusula está unida a todos los nodos de las otras cláusulas, salvo los que son $\neg x$.

Ahora si demostramos que 3-SAT es reducible a clique su Q es satisficible.

$$\Leftarrow Q \text{ está en 3-SAT} \equiv Q = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (\nu_{i1} \vee \nu_{i2} \vee \nu_{i3})$$

Si Q es satisficible, entonces $\forall i \in \{1, \dots, n\} \exists j \in \{1, 2, 3\}$ tal que ν_{ij} es verdadero, es decir, en todas las cláusulas (enumeradas a 1 a n) hay algún literal verdadero.

(Esto es la asignación de valores que hace a Q $\vee$ que existe pues Q es satisficible)

Sea $B = \{\nu_{ij}\}$ el conjunto de un literal de cada cláusula que sabemos que se hace $\vee$ con esa asignación. Hay exactamente n elementos en B . Ahora veamos que en el grafo, todos los elementos de B están conectados entre sí, por lo que se tiene un clique de tamaño n .

2. nodos están conectados si:
1. son de cláusulas $\neq$'s
 2. no no es la negación del otro

1. sabemos que todos los elementos de B son de cláusulas distintas por definición
2. sabemos que existe una asignación de valores de verdad que haga verdaderos a todos los elementos de B , por lo que no es posible que alguno sea la negación del otro ya que no podrían ser verdaderos simultáneamente

Luego todos los nodos de B están unidos con todos y se tiene un clique de tamaño n .

//

$\Rightarrow$ Si en el grafo hay un clique de tamaño al menos n , necesariamente hay al menos un literal de cada cláusula en el clique pues hay n cláusulas y para que dos nodos estén unidos necesariamente están en cláusulas diferentes.

Más aún, ningún elemento del clique puede ser la negación de otro, por lo que es posible que sean todos verdaderos simultáneamente.

Luego existe una asignación de verdad que hace $\top$ a $\mathcal{C}$ que es tomando $\top$ a todos los nodos del clique (que es posible por el argumento anterior) y hace $\top$ a $\mathcal{C}$ pues hay al menos un elemento en cada cláusula que es $\top$.

Luego, $\mathcal{C}$ es satisfacible. //

$\therefore$ 3-SAT es reducible a clique si $\mathcal{C}$ es satisfacible.