

PAUTA AUXILIAR 2

P1) Definimos

$D \equiv$ Daniela es inocente
 $G \equiv$ Gonzalo es inocente
 $M \equiv$ Matías es inocente

Luego se tiene que

$$D \equiv \neg G \wedge M$$

$$G \equiv \neg D \rightarrow \neg M$$

$$M \equiv M \wedge (\neg D \vee \neg G)$$

Pues las afirmaciones son verdaderas si y sólo si son inocentes

Caso 1: D es V

$$D \equiv \neg G \wedge M \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Daniela inocente} \\ \text{Gonzalo culpable} \\ \text{Matías inocente} \end{array} \right.$$

Pero $\neg G \equiv \neg(\neg D \rightarrow \neg M) \equiv \neg D \wedge M$ (un implica sólo es falso en el caso $V \rightarrow F$)
~~contradicción~~ $\rightarrow \leftarrow$ contradicción pues D es V

Luego no es posible que Daniela sea inocente ya que se llega a una contradicción

Caso 2: D es F

$$\neg D \equiv \neg(\neg G \wedge M) \equiv G \vee \neg M$$

Caso 2.1: G es V

$$G \equiv \neg D \rightarrow \neg M \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Daniela es culpable} \\ \text{Gonzalo es inocente} \\ \text{Matías es culpable} \end{array} \right.$$

Caso 2.2 M es F ($\neg M$)

$$\begin{aligned} \neg M &\equiv \neg(M \wedge (\neg D \vee \neg G)) \equiv \neg M \vee \neg(\neg D \vee \neg G) \\ &\equiv \neg M \vee (D \wedge G) \end{aligned}$$

Pero estamos en el caso en que $\neg M$ es V por lo que la proposición es V y todo calza.

concluimos que Gonzalo es inocente, mientras que Daniela y Matías son culpables.

P2] a) $\forall x Q \equiv \neg (\exists x \neg Q) \equiv \neg \exists x \neg Q \quad \therefore \text{es } \nabla$

b) $\exists x Q \equiv \neg (\forall x \neg Q) \equiv \neg \forall x \neg Q \quad \therefore \text{es } \nabla$

d) es Falsa

contraejemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sea $Q: x \geq 4$

$\psi: x \leq 3$

se cumple que $(\forall x \in A)(Q \vee \psi)$ pero no es cierto que

$(\forall x \in A)Q \vee (\forall x \in A)\psi$ ya que todos los elementos de A cumplen alguna de las proposiciones pero ninguna proposición es ∇ para todos los elementos de A .

e) es falsa ya que es equivalente a (d)

$$[\exists x (Q \wedge \psi) \equiv (\exists x Q) \wedge (\exists x \psi)] \quad / \neg$$

$$\equiv [\forall x (\neg Q \vee \neg \psi) \equiv (\forall x \neg Q) \vee (\forall x \neg \psi)]$$

$$\text{sea } p = \neg Q, \quad q = \neg \psi$$

$$\equiv [\forall x (p \vee q) \equiv (\forall x p) \vee (\forall x q)] \leftarrow (d)$$

f) es ∇ ya que si para todo x ambas proposiciones son ∇ , luego en particular cada proposición es verdadera para todo x .

c) ∇ ya que es equivalente a (f) por el mismo argumento que (e) es equivalente a (d).

P3] a) No es funcionalmente completo ya que para $\wedge, \vee, \rightarrow$, si el input son sólo 1's, el output es necesariamente 1, es decir

$$1 \wedge 1 \equiv 1$$

$$1 \vee 1 \equiv 1$$

$$1 \rightarrow 1 \equiv 1$$

Luego no existe ninguna combinación de estos elementos tal que si el input es 1 el output sea 0, por lo que es imposible encontrar una proposición equivalente a $\neg p$, por lo que el conjunto no es funcionalmente completo.

b) Sabemos que $\{\neg, \vee\}$ es ~~funcionalmente~~ funcionalmente completo por lo que basta con armar proposiciones equivalentes

$$\neg p \equiv \neg p \wedge \neg p \equiv p \text{ NOR } p$$

$$\begin{aligned} p \vee q &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q) \\ &\equiv \neg(p \text{ NOR } q) \wedge \neg(p \text{ NOR } q) \equiv (p \text{ NOR } q) \text{ NOR } (p \text{ NOR } q) \end{aligned}$$

$\therefore \{\text{NOR}\}$ es funcionalmente completo

Los conectivos unarios $\perp$, $\top$ se definen de la siguiente forma:

p	$\perp p$	$\top p$
0	0	1
1	0	1

¿Es $\{\wedge, \perp, \top\}$ funcionalmente completo?

Solución

No es funcionalmente completo. La demostración la haremos por inducción. Si el conjunto de variables proposicionales es P , entonces el conjunto de fórmulas proposicionales $L(P)$ se define como el menor conjunto tal que:

- (caso base) Si $p \in P$, entonces $p \in L(P)$
- (caso inductivo 1) Si $\varphi \in L(P)$, entonces $\perp\varphi \in L(P)$
- (caso inductivo 2) Si $\varphi \in L(P)$, entonces $\top\varphi \in L(P)$
- (caso inductivo 3) Si $\varphi, \psi \in L(P)$, entonces $\varphi \wedge \psi \in L(P)$

Explicaremos ahora la forma en que se hará la demostración. Sea $p \in P$, mostraremos que, para toda fórmula $\varphi \in L(P)$, se tiene que φ es una tautología, que φ es una contradicción, o que existe una valuación σ tal que $\sigma(p) = 0 = \sigma(\varphi)$. Es decir, ninguna fórmula en $L(P)$ es equivalente a $\neg p$, porque $\neg p$ no es una tautología, no es una contradicción, y además $\sigma(\neg p) = 1$ para toda valuación σ tal que $\sigma(p) = 0$. La demostración, como ya se dijo, será por inducción.

1. Caso base: sea $\varphi \in P$. Entonces, existe alguna valuación σ tal que $\sigma(p) = 0$ y $\sigma(\varphi) = 0$.
2. Caso inductivo 1: suponemos que la afirmación es cierta para $\varphi \in L(P)$. Directamente por su tabla de verdad, se ve que $\sigma(\perp\varphi) = 0$ para toda valuación σ , así que $\perp\varphi$ es una contradicción.
3. Caso inductivo 2: suponemos que la afirmación es cierta para $\varphi \in L(P)$. Directamente por su tabla de verdad, se ve que $\sigma(\top\varphi) = 1$ para toda valuación σ , así que $\top\varphi$ es una tautología.
4. Caso inductivo 3: suponemos que la afirmación es cierta para $\varphi, \psi \in L(P)$. Podemos estar en tres casos. Por una parte, si alguna de las dos fórmulas es una contradicción, es directo ver que $\varphi \wedge \psi$ es una contradicción. Por otra parte, si ambas son tautologías, entonces es también fácil ver que $\varphi \wedge \psi$ es una tautología. Por último, tenemos el caso en que alguna de las dos fórmulas (digamos φ , sin perder generalidad) es tal que existe una valuación σ tal que $\sigma(p) = 0 = \sigma(\varphi)$. Entonces, es evidente también que $\sigma(\varphi \wedge \psi) = 0$.

Así, la propiedad enunciada más arriba queda demostrada por inducción. Esto muestra que $\neg p$ no es equivalente a ninguna fórmula en $L(P)$. Es decir, que $\neg p$ no puede construirse usando los conectivos $\{\wedge, \perp, \top\}$. Dicho de otra manera, concluimos que $\{\wedge, \perp, \top\}$ no es funcionalmente completo.