CC3101 — Matemáticas Discretas para Computación

Bosquejos de Soluciones Control 1

19 de octubre de 2016

Dispone de 2 horas para resolver el control.
Responda cada pregunta en una hoja separada y ponga su nombre en cada hoja de respuesta.
Todas las preguntas tienen el mismo puntaje.

1. El conjunto de árboles binarios sobre los números naturales, denotado por $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$, se define recursivamente de la siguiente forma:

   - si $k \in \mathbb{N}$ entonces $\texttt{<}k\texttt{>} \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$.
   - si $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\texttt{[}\ k\ T_1\ T_2\ \texttt{]} \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$.

   Por ejemplo, los siguientes son elementos en $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$:

   $$T_1 = \texttt{<3>} \qquad T_2 = \texttt{[1[2<3><4>][5<6><7>]]} \qquad T_3 = \texttt{[2[3<1>[2<1>[4<3><2>]]]<1>]}$$

   Las siguientes preguntas tienen que ver con el conjunto $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$.

   a) Las hojas de un árbol binario T en $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ son todos los valores dentro de T que fueron creados usando la primera regla de construcción. Por ejemplo, el árbol T_1 tiene sólo una hoja, T_2 tiene 4 hojas y T_3 tiene 5 hojas. Defina por inducción la función $CH : \mathcal{T}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ que cuenta la cantidad de hojas de un árbol en $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$.

   b) Dado un $T \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$, la profundidad de una hoja $\texttt{<}k\texttt{>}$ es la cantidad de paréntesis cuadrados ($\texttt{[ ]}$) que *encierran* a $\texttt{<}k\texttt{>}$ en T. La profundidad de T es el máximo de las profundidades de sus hojas. Por ejemplo, la profundidad de T_1 es 0, la profundidad de T_2 es 2 y la profundidad de T_3 es 4. Defina por inducción la función $P : \mathcal{T}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ que dado un árbol T entregue la profundidad de T.

   c) Demuestre que un árbol binario T no puede tener más de $2^{P(T)}$ hojas. Es decir, demuestre que para todo árbol $T \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ se tiene que $CH(T) \leq 2^{P(T)}$.

   Bosquejo de Solución:

   a) $CH(\texttt{<}k\texttt{>}) = 1$, $CH(\texttt{[}\ k\ T_1\ T_2\ \texttt{]}) = CH(T_1) + CH(T_2)$

   b) $P(\texttt{<}k\texttt{>}) = 0$, $P(\texttt{[}\ k\ T_1\ T_2\ \texttt{]}) = 1 + \text{máx}\{P(T_1), P(T_2)\}$

   c) $CH(\texttt{<}k\texttt{>}) = 1 = 2^0 = 2^{P(\texttt{<}k\texttt{>})}$, $CH(\texttt{[}\ k\ T_1\ T_2\ \texttt{]}) = CH(T_1) + CH(T_2) \leq 2^{P(T_1)} + 2^{P(T_2)} \leq 2 \times 2^{\text{máx}\{P(T_1),P(T_2)\}} = 2^{1+\text{máx}\{P(T_1),P(T_2)\}} = 2^{P(\texttt{[}\ k\ T_1\ T_2\ \texttt{]})}$

   Puntos:

   - 2 ptos por cada parte
   - en cada caso 0.5 por base, 1.5 por caso recursivo/inductivo
   - puntos intermedios a criterio de corrector

2. Un conjunto $\mathcal{S}$ se dice *transitivo* si cada vez que se cumple $A \in \mathcal{S}$ y $X \in A$, entonces también se cumple que $X \in \mathcal{S}$. Las siguientes preguntas tienen que ver con conjuntos transitivos.

a) Construya conjuntos transitivos con 1, 2 y 3 elementos.

b) Suponga que $\mathcal{S}$ es transitivo. ¿Qué relación hay entre $\mathcal{S}$ y $\bigcup \mathcal{S}$?

c) Suponga que $\mathcal{S}$ es transitivo ¿Qué relación hay entre $\mathcal{S}$ y el conjunto potencia de $\mathcal{S}$?

Justifique claramente cada una de sus respuestas.

Bosquejo de Solución:

a) $\{\phi\}$, $\{\phi, \{\phi\}\}$, $\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

b) $\bigcup \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$

c) $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathcal{S}}$

Puntos:

- 2 puntos por cada parte
- en parte (a) puntos intermedios por cada caso correcto (0.7x3 con un máximo de 2ptos)
- partes (b) y (c) 1 punto por la relación (simplemente decir que uno es subconjunto de otro), 1 punto por la demostracion/justificacion convincente

Las siguientes preguntas tienen que ver con lógica proposicional, relaciones de orden parcial y relaciones de equivalencia. Recuerde que $\mathcal{L}(P)$ denota el conjunto de todas las fórmulas de la lógica proposicional con variables en P. Recuerde además que $\equiv$ denota equivalencia lógica y $\models$ denota consecuencia lógica.

3. Es claro que $\equiv$ es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{L}(P)$. Suponga que $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. En este caso ¿cuál es el índice de $\equiv$ sobre $\mathcal{L}(P)$? Justifique claramente su respuesta.

   Bosquejo de Solución:

   Este problema lo discutimos en clases un par de veces. El problema se podía resolver contando la cantidad de fórmulas que no son lógicamente equivalentes. Para esto bastaba con contar la cantidad de posibles modelos diferentes, o equivalentemente la cantidad de tabas de verdad distintas. Si tenemos n variables, cada tabla de verdad tiene 2^n filas, por lo que la cantidad de tablas de verdad distintas son 2^{2^n} y ese es el índice de $\equiv$.

   Puntos:

   - saber lo que había que hacer (contar clases de equivalencia): 1 pto
   - idea de como hacerlo (contar tablas de verdad o valuaciones): 1 pto
   - contar bien: resto de los puntos

4. Considere el conjunto $\mathcal{L}(P)/_{\equiv}$, el conjunto cuociente de $\mathcal{L}(P)$ bajo la relación de equivalencia lógica. Para simplificar la notación, dada un $\alpha \in \mathcal{L}(P)$ a la clase de equivalencia de α bajo $\equiv$ le llamaremos simplemente $[\alpha]$ (en vez de $[\alpha]_{\equiv}$). Definimos la relación $\models^*$ sobre $\mathcal{L}(P)/_{\equiv}$ de la siguiente forma

   $$[\alpha] \models^* [\beta] \text{ si y solo si } \alpha \models \beta.$$

   a) Demuestre que $\models^*$ está bien definida (es decir que su definición no depende de los representantes).

   b) Demuestre que $\models^*$ es una relación de orden parcial sobre $\mathcal{L}(P)/_{\equiv}$.

   c) Suponga que $P = \{p, q\}$ y considere el subconjunto de $\mathcal{L}(P)/_{\equiv}$ definido por

   $$\mathcal{S} = \{[\alpha] \mid [\alpha] \models^* [(p \vee (\neg q))]\}.$$

   Dibuje el diagrama de Hasse para $(\models^*, \mathcal{S})$.

Bosquejo de Solución:

a) Suponga que $[\alpha] \models^* [\beta]$ y sean φ y ψ tales que $[\varphi] = [\alpha]$ y $[\psi] = [\beta]$. De $[\varphi] = [\alpha]$ obtenemos que $\varphi \equiv \alpha$, y similarmente $\psi \equiv \beta$, luego, dado que $\alpha \models \beta$, obtenemos que $\varphi \models \psi$ lo que implica que $[\varphi] \models^* [\psi]$.

b) La única propiedad interesante es la antisimetría. En este caso suponga que $[\alpha] \models^* [\beta]$ y $[\beta] \models^* [\alpha]$. De esto obtenemos que $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$ y por lo tanto $\alpha \equiv \beta$ lo que implica que $[\alpha] = [\beta]$.

c) Dibujo...

Puntos:

- 2 puntos por cada parte
- en parte (a) casi todo el puntaje debiera ser por saber lo que tienen que hacer (una vez que saben lo demás debiera ser muy trivial), puntos intermedios a criterio del corrector
- parte (b) 0.5 por relfexividad, 0.5 transitividad, 1 por antisimetría. Puntos intermedios a criterio del corrector.
- parte (c) 2 puntos por el dibujo con puntos intermedios según criterio de corrector