UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 1 - Semestre Otoño 2016

1. Esta pregunta trata sobre la lógica proposicional. Sean α, β fórmulas y P, Q los conjuntos de proposiciones mencionados en α y β, respectivamente. Asuma que $\alpha \to \beta$ es una tautología, es decir, se cumple que $\models \alpha \to \beta$. También asuma que α y β comparten al menos una variable proposicional, es decir, $P \cap Q \neq \emptyset$. Demuestre que existe una fórmula θ que cumple lo siguiente:

   a) θ solo utiliza proposiciones en $P \cap Q$.

   b) Para toda valuación $\sigma : P \to \{0, 1\}$ tal que $\hat{\sigma}(\alpha) = 1$ se cumple que $\hat{\sigma}(\theta) = 1$.

   c) Para toda valuación $\sigma : Q \to \{0, 1\}$ tal que $\hat{\sigma}(\theta) = 1$ se cumple que $\hat{\sigma}(\beta) = 1$.

   Solución: Para cada valuación $\sigma : P \to \{0, 1\}$ definimos su restricción a las variables en $P \cap Q$ como σ_Q. Dado que Q es finito, cada σ_Q puede ser descrito por una fórmula $\phi(\sigma_Q)$ en $L(P \cap Q)$. Por ejemplo, si $P \cap Q = \{q_1, q_2\}$ y tenemos que $\sigma_Q(q_1) = 1 = 1 - \sigma_Q(q_2)$, entonces $\phi(\sigma_Q) = q_1 \wedge \neg q_2$. Suponga inicialmente que existe al menos una valuación $\sigma : P \to \{0, 1\}$ tal que $\sigma(\alpha) = 1$. Considere entonces la expresión $\theta = \bigwedge_{\sigma(\alpha)=1} \phi(\sigma_Q)$. Note que esta corresponde a una conjunción *finita* de fórmulas en $L(P \cap Q)$, y por tanto θ es una fórmula en $L(P \cap Q)$. En particular, θ cumple (a). Demostraremos ahora (b), i.e., para toda valuación $\sigma : P \to \{0, 1\}$ tal que $\sigma(\alpha) = 1$ se cumple que $\sigma(\theta) = 1$. Pero esto es sencillo ya que θ es por definición cierta en toda valuación $\sigma : P \to \{0, 1\}$ que satisface a α. Falta demostrar (c). Considere una valuación $\sigma : Q \to \{0, 1\}$ tal que $\sigma(\theta) = 1$. Note que debe existir por definición una valuación $\sigma' : P \cup Q \to \{0, 1\}$ tal que $\sigma'(\alpha) = 1$ y $\sigma'(q) = \sigma(q)$ para todo $q \in Q$. Dado que $\models \alpha \to \beta$, se debe satisfacer que $\sigma'(\beta) = 1$. Dado que la restricción de σ' a Q es σ, concluímos que $\sigma(\beta) = 1$.

   Supongo ahora que no existe valuación $\sigma : P \to \{0, 1\}$ tal que $\sigma(\alpha) = 1$, es decir, α es una contradicción. Es fácil ver entonces que podemos definir a θ como $(r \wedge \neg r)$, donde r es una proposición cualquiera en $P \cap Q$.

2. Esta pregunta es sobre la lógica de predicados (relaciones), también conocida como lógica de primer orden:

   a) (2pts) Considere un vocabulario que contiene una relación binaria R. Exprese en la lógica de primer orden que R corresponde a un orden lineal donde cada elemento tiene un antecesor y un sucesor (es decir, un elemento que inmediatamente lo precede/antecede en el orden lineal).

   Solución: Primero se debe expresar que R es una relación refleja, antisimétrica, transitiva, y que cumple que todo par de elementos puede ser comparado según R, i.e., $\forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$. Luego debemos expresar que todo elemento tiene sucesor y antecesor. En el primer caso basta escribir una fórmula $\forall x \exists y (R(x, y) \wedge \neg \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y)))$. El segundo caso es análogo.

Sea $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ un conjunto finito de colores, y $\mathcal{H}, \mathcal{V}$ dos relaciones en C llamadas *restricciones horizontales* y *verticales*, respectivamente. Intentaremos determinar si el plano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ puede ser coloreado con colores en C respetando las restricciones horizontales y verticales. Esto significa que existe una función $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to C$ tal que para todo $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se cumple que:

$$\big(f(i,j), f(i+1,j)\big) \in \mathcal{H} \ \text{ y } \ \big(f(i,j), f(i,j+1)\big) \in \mathcal{V}.$$

Para esto extenderemos el vocabulario que contiene a la relación binaria R con las relaciones binarias P_l, para $1 \leq \ell \leq k$. Intuitivamente, $P_l(i,j)$ es cierto si y solo si la coloración del plano le asigna color ℓ a la posición $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) (4pts) Escriba una fórmula que exprese lo siguiente: (a) Toda posición recibe un, y solo un, color en el conjunto C, y (b) el color que reciben las posiciones respeta las restricciones $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$, respectivamente. Para ello puede utilizar la relación R definida en *(a)*, asumiendo que su interpretación cumple las condiciones ahí descritas.

Solución: Basta considerar la conjunción de las siguientes fórmulas:

- $\forall x \forall y \big((\bigvee_{1 \leq \ell \leq k} P_\ell(x,y)) \wedge (\bigwedge_{1 \leq \ell < \ell' \leq k}(\neg P_\ell(x,y) \vee \neg P_{\ell'}(x,y)))\big)$.
- $$\forall x \forall y \forall u \forall v \big(\bigwedge_{1 \leq \ell \leq k} (P_\ell(x,y) \wedge Succ(x,u) \wedge Succ(y,v) \ \to$$
$$\bigvee_{(c_\ell, c_{\ell'}) \in \mathcal{H}} \ \bigvee_{(c_\ell, c_{\ell'}) \in \mathcal{V}} P'_\ell(u,y) \wedge P_{\ell''}(x,v))\big),$$

  donde $Succ(x,y)$ es una abreviación de $R(x,y) \wedge \neg \exists z(R(x,z) \wedge R(z,y))$.

Si alguien expresa solo la primera parte tiene 1 pto.

item Sea R una relación en A. Recuerde que R^{-1} denota al *inverso* de la relación R; es decir:

$$R^{-1} \ = \ \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}.$$

Además, definimos a R^+ como $R^* \cup I$, donde $I = \{(a,a) \mid a \in A\}$ es la identidad en A.

Una relación R es *euclideana* si satisface la siguiente fórmula:

$$\forall x \forall y \forall z \big((R(x,y) \wedge R(x,z)) \ \to \ R(y,z)\big).$$

Demuestre lo siguiente:

a) (3pts) Si R es una relación en A, entonces la relación $(R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^+ \circ R)$ es simétrica, transitiva, y euclideana.

b) (3pts) Si R es euclideana, entonces $(R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^+ \circ R) \subseteq R$.

Ayuda: Note que $S \circ I = S$. Además, $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$. En particular, $(R \circ R^{-1})$ es simétrica.

Solución: Comencemos con (a). Demostramos primero la simetría. Sea $(a,b) \in (R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^+ \circ R)$. Entonces, $(a,b) \in R^{-1} \circ R$ o $(a,b) \in (R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^i \circ R)$ para algún $i \geq 1$. En el primer caso tenemos que $(b, a) \in (R^{-1} \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ R$. En el segundo caso, $(b, a) \in (R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^i \circ R)^{-1} = (((R \cup R^{-1})^i \circ R)^{-1} \circ R) = ((R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^i) \circ R)$.

Ahora demostramos la transitividad. Asuma que (a, b) y (b, c) están en $(R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^+ \circ R)$. Es decir, $(a, b) \in R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^i \circ R$ y $(b, c) \in R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^j \circ R$ para algún $i, j \geq 0$ (asumiendo que S^0 es la identidad para una relación S). Es decir, existen d, e, f, g tal que: (i) $(a, d), (b, f) \in R^{-1}$, (ii) $(e, b), (g, c) \in R$, (iii) $(d, e) \in (R \cup R^{-1})^i$, y (iv) $(f, g) \in (R \cup R^{-1})^j$. Luego, $(a, c) \in R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^{i+j+2} \circ R$.

Finalmente, cualquier relación simétrica y transitiva debe ser euclideana.

Sigamos con (b). Considere un par $(a, b) \in (R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^+ \circ R)$. Luego, $(a, b) \in R^{-1} \circ R$ o $(a, b) \in (R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^i \circ R)$ para algún $i \geq 1$. En el primer caso tenemos que $(a, b) \in R$ por definición de relación euclideana. Para el segundo caso demostraremos por inducción en $i \geq 1$ que $(R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^i \circ R) \subseteq R$. (El notar que hay que hacer inducción da 1 punto).

Para el caso base $i = 1$ necesitamos demostrar que $R^{-1} \circ R \circ R \subseteq R$ y que $R^{-1} \circ R^{-1} \circ R \subseteq R$. El segundo caso es sencillo ya que R es euclideano, y por tanto $R^{-1} \circ R \subseteq R$. Es decir, $R^{-1} \circ (R^{-1} \circ R) \subseteq R^{-1} \circ R \subseteq R$. Para el primer caso tenemos que existe c tal que $(a, c) \in R^{-1} \circ R$ y $(c, b) \in R$. Pero entonces $(c, a) \in R^{-1} \circ R$, ya que $R^{-1} \circ R$ es simétrica, y por tanto, $(c, a) \in R$ ya que R es euclideana. Dado que $(c, b) \in R$, concluimos que $(a, b) \in R$ pues R es euclideana. (Esto es 1 punto más).

Para el caso inductivo $i + 1$, necesitamos demostrar que $R^{-1} \circ R \circ (R \cup R^{-1})^i \circ R \subseteq R$ y que $R^{-1} \circ R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^i \circ R \subseteq R$. El segundo caso es sencillo ya que por HI y el hecho de que R es euclideana tenemos que $R^{-1} \circ (R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^i \circ R) \subseteq R^{-1} \circ R \subseteq R$. En el primer caso tenemos que existe c tal que $(a, c) \in R^{-1} \circ R$ y $(c, b) \in (R \cup R^{-1})^i \circ R$. Pero entonces $(c, a) \in R^{-1} \circ R$, ya que $R^{-1} \circ R$ es simétrica, y por tanto, $(c, a) \in R$ ya que R es euclideana. Luego, $(a, c) \in R^{-1}$. Entonces $(a, b) \in R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^i \circ R$, de donde concluimos que $(a, b) \in R$ por HI.