UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 1 - Semestre Primavera 2014

1. En clases hemos definido la clausura transitiva de una relación R sobre un conjunto A. De la misma forma podemos definir su *clausura refleja* como $R \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$, y su *clausura simétrica* como $R \cup \{(a, b) \mid (b, a) \in R\}$.

   Sea R_e la clausura transitiva de la clausura simétrica de la clausura refleja de una relación R. Demuestre que R_e es la *menor* relación de equivalencia que contiene a R (donde "menor" se define con respecto al orden parcial definido por $\subseteq$ sobre el conjunto de relaciones en A).

   Solución: Demostraremos primero que R_e es una relación de equivalencia. Claramente, R_e es refleja ya que contiene a la clausura refleja de R (1 pto). De la misma forma, la relación R_e es transitiva ya que corresponde a la clausura transitiva de otra relación (1 pto). Por último, la relación es simétrica. De hecho, si $(a, b) \in R_e$ quiere decir que (a, b) pertenece a la clausura transitiva de la relación R' definida por la clausura simétrica de la clausura refleja de R. Es decir, existen elementos $c_1, \ldots, c_n \in A$, $n \geq 0$, tal que $(a, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_n, b) \in R'$. Pero por definición, $(b, c_n), \ldots, (c_2, c_1), (c_1, a) \in R'$ (ya que R' es la clausura simétrica de otra relación), y por tanto (b, a) pertenece a R_e (1,5 ptos).

   Debemos demostrar ahora que si una relación de equivalencia S contiene a R, entonces $R_e \subseteq S$. Por definición, $R_e = \bigcup_{i \geq 1} (R')^i$, y por tanto basta demostrar que $(R')^i \subseteq S$, para todo $i \geq 1$. El caso base es trivial debido a que S es relación de equivalencia y por tanto debe contener a $R' = (R')^1$ (1 pto). El caso inductivo se obtiene fácilmente por hipótesis y transitividad de S (1,5 ptos).

2. Defina un lenguaje proposicional que permita describir el estado de un semáforo en distintos momentos $1, \ldots, k$ de tiempo. Con tal lenguaje exprese lo siguiente:

   - En cada momento del tiempo el semáforo está en un, y exactamente un, color.
   - Si el color del semáforo cambia, entonces los únicos cambios válidos son de verde a amarillo, de amarillo a rojo, y de rojo a verde.
   - El semáforo puede permanecer en un color por a lo más tres estados consecutivos de tiempo.

   Solución: El lenguaje proposicional está dado por el conjunto $\{a_i, r_i, v_i \mid 1 \leq i \leq k\}$, donde a_i, v_i, r_i representan que en el momento i el semáforo está en color amarillo, verde y rojo, respectivamente. Las fórmulas que representan las respectivas condiciones pedidas son las siguientes:

   - (2 pts) $\bigwedge_{1 \leq i \leq k} \big((v_i \vee r_i \vee a_i) \wedge \neg(v_i \wedge r_i) \wedge \neg(r_i \wedge a_i) \wedge \neg(v_i \wedge a_i)\big)$.
   - (2 pts) $\bigwedge_{1 \leq i < k} \big((v_i \rightarrow v_{i+1} \vee a_{i+1}) \wedge (a_i \rightarrow a_{i+1} \vee r_{i+1}) \wedge (r_i \rightarrow r_{i+1} \vee v_{i+1})\big)$.
   - (2 pts) $\bigwedge_{1 \leq i \leq k-3} \big((v_i \rightarrow a_{i+1} \vee a_{i+2} \vee a_{i+3}) \wedge (a_i \rightarrow r_{i+1} \vee r_{i+2} \vee r_{i+3}) \wedge (r_i \rightarrow v_{i+1} \vee v_{i+2} \vee v_{i+3})\big)$.

3. Una fórmula de la lógica de predicados está en *forma normal* si es de la forma $Q_1x_1Q_2x_2 \ldots Q_mx_m\varphi$, donde cada Q_i es un cuantificador $\forall$ o $\exists$ ($1 \leq i \leq m$) y φ es una fórmula sin cuantificación. Por ejemplo, $\forall x \exists y P(x, y)$ está en forma normal, pero $\forall x P(x) \wedge \exists y R(y)$ no lo está.

   Sean ϕ, θ fórmulas en forma normal. Demuestre que existe α en forma normal tal que $\alpha \equiv \phi \wedge \theta$.

   Solución: Si ϕ y θ no tienen cuantificación, entonces $\phi \wedge \theta$ está en forma normal. Asuma ahora que ϕ es de la forma $\exists x \phi'$. Entonces $\phi \wedge \theta$ es equivalente a $\exists x(\phi' \wedge \theta)$. De la misma forma, si ϕ es de la forma $\forall x \phi'$ entonces $\phi \wedge \theta$ es equivalente $\forall x(\phi' \wedge \theta)$. Si seguimos recursivamente este proceso es posible llegar a una fórmula en forma normal (4 pts). Por ejemplo, $\forall x P(x) \wedge \exists y R(y)$ se convierte mediante el proceso en la fórmula equivalente $\forall x \exists y(P(x) \wedge R(y))$.

   Hay un importante detalle más que considerar eso sí. Al momento de demostrar que $\exists x \phi \wedge \theta$ es equivalente a $\exists x(\phi' \wedge \theta)$, es necesario asumir que la variable x no aparece sin cuantificación en θ (2 pts). Esto, sin embargo, se puede asumir sin pérdida de generalidad, ya que de aparecer simplemente la podemos renombrar por una variable u que no aparece en ϕ. La razón por la cual debemos asumir esta se puede ejemplificar como sigue: La fórmula $(\exists x P(x)) \wedge R(x)$ no es equivalente a la fórmula $\exists x(P(x) \wedge R(x))$ sino a la fórmula $\exists x(P(x) \wedge R(u))$.

4. Sea U un conjunto finito y asuma que $\mathcal{P}(U)$ es el conjunto potencia de U. Sea $F : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ una función que satisface lo siguiente: Para todo $X, Y \subseteq U$, si $X \subseteq Y$ entonces $F(X) \subseteq F(Y)$.

   Sea $\mathcal{W} = \{Y \mid Y \subseteq U,\ F(Y) \subseteq Y\}$. Asuma que $\mathcal{W} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ y sea $Z = Y_1 \cap Y_2 \cap \cdots \cap Y_k$. Demuestre que $\mathcal{W} \neq \emptyset$ y $F(Z) = Z$.

   Solución: Claramente $\mathcal{W} \neq \emptyset$ ya que $U \in \mathcal{W}$ (1 pto). Demostraremos primero que $F(Z) \subseteq Z$. Dado que $Z \subseteq Y_i$, para cada $1 \leq i \leq k$, tenemos que $F(Z) \subseteq F(Y_i)$, y, por tanto, $F(Z) \subseteq Y_i$, para cada $1 \leq i \leq k$. Esto quiere decir que $F(Z) \subseteq Y_1 \cap \cdots \cap Y_k = Z$ (2,5 pts). Demostraremos ahora que $Z \subseteq F(Z)$. Sabemos que $F(Z) \subseteq Z$. Por tanto, $F(F(Z)) \subseteq F(Z)$, y entonces $F(Z) \in \mathcal{W}$. Sin embargo, por definición Z está contenido en todo $Y \in \mathcal{W}$, es decir, $Z \subseteq F(Z)$ (2,5 pts).