UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 1 - Semestre Primavera 2010

1. Una *cláusula* es una fórmula de la lógica proposicional de la forma $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n$, donde cada ℓ_i es un *literal*, es decir, una proposición p o su negación $\neg p$. Por ejemplo, $p \vee \neg q \vee r$ es una cláusula.

   La *regla de resolución* de la lógica proposicional establece lo siguiente: Si C_1 y C_2 son cláusulas y p es una variable proposicional, entonces desde las cláusulas $(C_1 \vee p)$ y $(C_2 \vee \neg p)$ es posible deducir la cláusula $C_1 \vee C_2$. Por ejemplo, desde las cláusulas $(p \vee \neg q \vee r)$ y $(\neg r \vee s)$ es posible deducir la cláusula $p \vee \neg q \vee s$.

   Demuestre que la regla de resolución es correcta. Esto es, si C_1 y C_2 son cláusulas y p es una variable proposicional, entonces
   $$\{(C_1 \vee p),\, (C_2 \vee \neg p)\} \models C_1 \vee C_2.$$

   Solución: Tome una fila arbitraria f de la tabla de verdad, y asuma, sin pérdida de generalidad, que $f((C_1 \vee p)) = f((C_2 \vee \neg p)) = 1$. Dado que $f(p) = 1$ o $f(\neg p) = 1$, analizamos dos casos:

   - $f(p) = 1$: Luego, $f(C_2) = 1$, puesto que $f((C_2 \vee \neg p)) = 1$ y $f(\neg p) = 0$. Por tanto, $f(C_1 \vee C_2) = 1$.
   - $f(\neg p) = 1$: Luego, $f(C_1) = 1$, puesto que $f((C_1 \vee p)) = 1$ y $f(p) = 0$. Por tanto, $f(C_1 \vee C_2) = 1$.

   Concluimos que $\{(C_1 \vee p),\, (C_2 \vee \neg p)\} \models C_1 \vee C_2$.

2. Considere un vocabulario para la lógica de primer orden que consiste de una relación binaria $<$ y dos relaciones unarias P_a y P_b.

   - Escriba una oración de la lógica de primer orden que sea cierta exactamente en aquellos dominios de discurso sobre este vocabulario que interpreten a $<$ como una relación de *orden lineal*; i.e. $<$ es una relación antisimétrica y transitiva, tal que para cualesquiera dos elementos distintos a, b del dominio de discurso se tiene que $a < b$ o $b < a$.

     Solución: Mediante la oración $\phi_<$ definida como
     $$\forall x \forall y \forall z \Big(\big((x<y) \wedge (y<x) \rightarrow x = y\big) \wedge \big((x<y) \wedge (y<z) \rightarrow (x<z)\big) \wedge \big((x<y) \vee (y<x) \vee x = y\Big).$$

   - A partir de lo anterior, construya una fórmula de la lógica de primer orden que sea cierta exactamente en aquellos dominios de discurso sobre este vocabulario que interpreten a $<$ como una relación de orden lineal y cuyo dominio de discurso sea de cardinalidad finita.

     Solución: Mediante la oración ϕ_{fin} definida como $\phi_< \wedge \alpha$, donde α es la oración $\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow y < x)$.

- Construya una fórmula de la lógica de primer orden que sea cierta exactamente en aquellos dominios de discurso sobre este vocabulario en que cada elemento pertenece ya sea a la interpretación de P_a o de P_b, pero no a ambas (es decir, la interpretación de P_a y P_b forman una *partición* del dominio de discurso).

  Solución: $\phi_{part} = \forall x(P_a(x) \vee P_b(x)) \wedge \neg\exists y(P_a(y) \wedge P_b(y))$.

- A partir de todo lo anterior, construya una fórmula de la lógica de primer orden que sea cierta exactamente en aquellos dominios de discurso sobre este vocabulario que (1) interpreten a $<$ como una relación de orden lineal, (2) el dominio de discurso sea de cardinalidad finita, (3) la interpretación de P_a y P_b formen una *partición* del dominio de discurso, y (4) si el dominio de discurso es $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, entonces n es par y para todo $1 \leq i \leq n$ se tiene que $a_i \in P_b$ si y solo si i es par.

  Solución: $\phi_{part} \wedge \phi_{fin} \wedge \beta$, donde β es la oración:

  $$\forall x((\neg\exists y(y < x)) \rightarrow P_a(x)) \wedge \forall x \forall y(S(x,y) \rightarrow (P_a(x) \leftrightarrow \neg P_a(y))) \wedge \forall x((\neg\exists y(x < y)) \rightarrow P_b(x)),$$

  donde $S(x,y)$ es la relación de sucesor con respecto a $<$, esto es:

  $$S(x,y) := x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y).$$

3. Sea R una relación en un conjunto A. Demuestre que $R^* = \bigcup_{i \leq 1} R^i$ es la menor relación transitiva en A que contiene a R.

   Hint: Que R^* sea la menor relación transitiva en A que contiene a R significa que, para cualquier relación R' en A que es transitiva y contiene a R, se tiene que $R^* \subseteq R'$.

   Solución: Primero demostramos que $\bigcup_{i \leq 1} R^i \subseteq R^*$. Basta demostrar que $R^i \subseteq R^*$, para cada $i \geq 1$. Demostramos por inducción. El caso base es trivial pues $R^1 = R$ y $R \subseteq R^*$. Asuma ahora que $(a,b) \in R^{i+1}$. Luego, por definición, existe $c \in A$ tal que $(a,c) \in R^i$ y $(c,b) \in R$. Luego, por hipótesis inductiva, $(a,c) \in R^*$, y dado que $R \in R^*$, $(c,b) \in R^*$. Por consiguiente, dado que R^* es transitiva, se tiene que $(a,c) \in R^*$. Esto demuestra que $R^{i+1} \subseteq R^*$, pues (a,b) es un par arbitrario.

   Para demostrar que $R^* \subseteq \bigcup_{i \geq 1} R^i$ basta demostrar que $\bigcup_{i \geq 1} R^i$ es transitiva y contiene a R. Claramente contiene a R. Para demostrar que es transitiva, sea $(a,b) \in R^i$ y $(b,c) \in R^j$. Luego, claramente $(a,c) \in R^{i+j}$.