UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 1 - Semestre Otoño 2011

1. Diseñe un circuito digital que tome como entrada dos números binarios $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ y $b_n b_{n-1} \cdots b_1 b_0$, $n \geq 0$, y compute como salida un número binario $c_n c_{n-1} \cdots c_1$ tal que $c_n c_{n-1} \cdots c_1$ es la representación binaria de $u - v$, donde:

   - u es el entero cuya representación binaria es $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$, y
   - v es el entero cuya representación binaria es $b_n b_{n-1} \cdots b_1 b_0$.

   Asuma para esto que $u \geq v$.

   Solución: Parecido al circuito en cascada para la suma que hicimos en clases, pero utilizando las siguientes reglas: $0 - 0 = 0$, $0 - 1 = 1$ (y pide prestado uno al siguiente bit más significativo), $1 - 0 = 1$ y $1 - 1 = 0$.

2. La propiedad de *compacidad* de la lógica proposicional establece lo siguiente:

   > Sea Σ un conjunto infinito de oraciones (en la lógica proposicional) sobre conjunto P de variables proposicionales (note que P también puede ser infinito). Entonces Σ es satisfacible si y solo si todo subconjunto finito de Σ es satisfacible.

   Demuestre, utilizando la propiedad de compacidad de la lógica proposicional, que lo siguiente se cumple para cualquier conjunto infinito Σ de oraciones sobre P y oración $\phi \in L(P)$:

   $$\Sigma \models \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe subconjunto finito } \Sigma_0 \text{ de } \Sigma \text{ tal que } \Sigma_0 \models \phi.$$

   Solución: $\Sigma \models \phi$ si y solo si $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ insatisfacible (visto en clases). Esto es equivalente (por propiedad de compacidad) a que exista un subconjunto finito Σ_0 de $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ que es insatisfacible. Pero lo último es equivalente a que existe subconjunto finito Σ_0 de Σ tal que $\Sigma_0 \models \phi$.

3. Una *cláusula* es una oración de la lógica proposicional de la forma $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n$, donde cada ℓ_i ($1 \leq i \leq n$) es un *literal*, es decir, una proposición p o su negación $\neg p$. Por ejemplo, $p \vee \neg q \vee r$ es una cláusula.

   Sea P un conjunto de variables proposicionales. Demuestre que toda oración $\phi \in L(P)$ es equivalente a una conjunción de cláusulas sobre P.

   Solución: Demostramos en clases que toda oración es equivalente a una disyución de conjucniones de literales (mediante la tabla d everdad). Dado que $\phi \equiv \neg(\neg\alpha)$, por lo anterior se tiene que $\phi \equiv \neg\alpha'$, donde α' es una disyución de conjunciones de literales que es equivalente a $\neg\alpha$. Pero la negación de α' es una conjunción de cláusulas.