UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 1 - Semestre Primavera 2017

1. Sea Σ un conjunto de oraciones en la lógica proposicional, y ϕ y ψ dos oraciones. Indique si las siguientes sentencias son verdaderas o falsas y demuéstrelo.

   a) "$\Sigma \models \phi \wedge \psi$" es equivalente a "$\Sigma \models \phi$ y $\Sigma \models \psi$".

   b) "$\Sigma \models \phi \rightarrow \psi$" es equivalente a "$\Sigma \models \phi$ implica que $\Sigma \models \psi$".

   Solución:

   a) Es cierto. Si $\Sigma \models \phi \wedge \psi$, entonces cada vez que Σ se hace cierto, $\phi \wedge \psi$ se hace cierto, por lo que tanto ϕ como ψ se hacen ciertos. Es decir, $\Sigma \models \phi$ y $\Sigma \models \psi$. Para la vuelta, cada vez que Σ se hace cierto, tanto ϕ como ψ se hacen ciertos, y entonces $\phi \wedge \psi$ se hace cierto, por lo cual $\Sigma \models \phi \wedge \psi$.

   b) La ida es cierta. Si $\Sigma \models \phi \rightarrow \psi$ y $\Sigma \models \phi$, entonces claramente $\Sigma \models \psi$. Pero la vuelta no tiene por qué valer. Puede ser que ni $\Sigma \models \phi$ ni $\Sigma \models \phi \rightarrow \psi$ sean ciertos (es decir, que pueda valer Σ sin que ϕ ni $\phi \rightarrow \psi$ valgan), y con ello "$\Sigma \models \phi$ implica que $\Sigma \models \psi$" vale porque el antecedente es falso. Ejemplo: $\Sigma = \{p\}$, $\phi = q$, $\psi = r$.

2. Recordemos los axiomas de Peano:

   a) El 1 es un número.

   b) Todo número tiene un (único) sucesor.

   c) El 1 no es el sucesor de ningún numero.

   d) Dos números distintos tienen distinto sucesor.

   e) El principio de inducción.

   Exprese estos axiomas usando fórmulas de la lógica relacional que vimos en clase. Para el principio de inducción, considere solamente un predicado $P(x)$ y explique por qué no puede expresarlo en forma general.

   Solución: Una posibilidad es establecer predicados $Uno(x)$ y $Suc(x, y)$, y las reglas:

   a) $\exists x\, Uno(x)$, y para establecer la unicidad, $\forall x\, \forall y\, (Uno(x) \wedge Uno(y) \rightarrow x = y)$.

   b) $\forall x\, \exists y\, Suc(x, y)$, y para establecer la unicidad, $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (Suc(x, y) \wedge Suc(x, z) \rightarrow y = z)$.

   c) $\neg \exists x\, \exists y\, (Suc(x, y) \wedge Uno(y))$

   d) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (Suc(x, z) \wedge Suc(y, z) \rightarrow x = y)$

   e) $((\forall x\, (Uno(x) \rightarrow P(x))) \wedge (\forall x\, \forall y\, ((P(x) \wedge Suc(x, y)) \rightarrow P(y)))) \rightarrow \forall x\, P(x)$

   El problema para el principio de inducción es que querríamos decir "para todo predicado P", pero no podemos cuantificar sobre predicados. Necesitaríamos una lógica de segundo orden (basta que digan lo primero).

3. Un *preorden* sobre A es una relación binaria reflexiva y transitiva sobre A.

   a) Demuestre que $E(x, y) \equiv P(x, y) \wedge P(y, x)$ es una relación de equivalencia sobre A.

   b) Considere el conjunto cociente A/E, donde cada elemento X es un subconjunto maximal de elementos de A equivalentes por E. Definimos una relación binaria R sobre A/E dada por $R(X, Y)$ si para todo $x \in X$ e $y \in Y$, vale $P(x, y)$. Demuestre que R es un orden.

   Solución:

   a) Es reflexiva: $E(x, x) \equiv P(x, x) \wedge P(x, x)$, que vale porque P es reflexiva. Es simétrica: $E(x, y) \rightarrow E(y, x)$, que vale pues el operador $\wedge$ es conmutativo. Es transitiva: $E(x, y) \wedge E(y, x) \equiv P(x, y) \wedge P(y, x) \wedge P(y, z) \wedge P(z, y)$, y por la transitividad de P se deduce $P(x, z) \wedge P(z, x) \equiv E(x, z)$.

   b) Es reflexiva: $R(X, X)$ pues, por definición de A/E, para todo par $x, x' \in X$ vale $E(x, x') \equiv P(x, x') \wedge P(x', x)$, y por lo tanto vale $P(x, x')$, que es lo que define $R(X, X)$. Es antisimétrica, pues si $R(X, Y)$ y $R(Y, X)$, entonces para todo $x \in X$ e $y \in Y$, vale $P(x, y)$ y $P(y, x)$, por lo que vale $E(x, y)$ y por definición de A/E vale $X = Y$. Es transitiva, pues si $R(X, Y)$ y $R(Y, Z)$, entonces para todo $x \in X$, $y \in Y$, y $z \in Z$, vale $P(x, y)$ y $P(y, z)$, por lo que vale $P(x, z)$ por transitividad de P, y por definición de R vale $R(X, Z)$.

4. Para las siguientes $f(n)$ y $g(n)$, determine si $f(n)$ es $O(g(n))$, $f(n)$ es $\Omega(g(n))$, o ambas.

   a) $f(n) = (\log \log n)^2$ y $g(n) = (\log n)/(\log \log n)$.

   b) $f(n) = 3^{3^n}$ y $g(n) = 4^{2^n}$.

   Solución:

   a) Sólo vale que $f(n)$ es $O(g(n))$. Puede verse, por ejemplo que $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0$, lo que implica $f(n) = o(g(n))$.

   b) Sólo vale que $f(n)$ es $\Omega(g(n))$. Puede verse, por ejemplo, que $\ln f(n) = 3^n \ln 3$ y $\ln g(n) = 2^n \ln 4$, de donde se ve claramente que $\ln f(n) = \Omega(\ln g(n))$, es decir, existen c y n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $\ln f(n) \geq c \cdot \ln g(n)$, y más aún, vale para un $c > 1$. Exponenciando ambos lados, tenemos $f(n) \geq g(n)^c \geq g(n)$. Esto también muestra que no puede ser que $f(n) = O(g(n))$. También lo pueden hacer tomando el límite de $g(n)/f(n)$.