UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 1 - Semestre Otoño 2010

1. Recuerde que un conjunto de fórmulas Θ en la lógica proposicional es satisfacible si y solo si existe una fila de la tabla de la verdad que hace verdadera a cada fórmula θ en Θ.

   Sea Σ un conjunto de fórmulas en la lógica proposicional. Asuma que el conjunto de variables proposicionales que son mencionadas en Σ es infinito (y, por tanto, Σ es también infinito).

   Decimos que Σ es *finitamente* satisfacible si y solo si todo subconjunto finito de Σ es satisfacible.

   Sea p una variable proposicional cualquiera. Demuestre que si Σ es finitamente satisfacible entonces $\Sigma \cup \{p\}$ o $\Sigma \cup \{\neg p\}$ es finitamente satisfacible (note que es posible que ambos lo sean).

   Solución: Asuma por contradicción que Σ es finitamente satisfacible pero ambos $\Sigma \cup \{p\}$ y $\Sigma \cup \{\neg p\}$ no lo son. Luego, existen subconjuntos finitos θ_1 y θ_2 de $\Sigma \cup \{p\}$ y $\Sigma \cup \{\neg p\}$, respectivamente, tal que θ_1 y θ_2 son insatisfacibles. Como Σ es finitamente satisfacible podemos asumir que $p \in \theta_1$ y $\neg p \in \theta_2$.

   Sean θ_1' y θ_2' los subconjuntos de Σ tal que $\theta_1 = \theta_1' \cup \{p\}$ y $\theta_2 = \theta_2' \cup \{\neg p\}$. Como $\theta_1' \cup \theta_2'$ es un subconjunto finito de Σ, existe fila f de la tabla de verdad tal que $f(\theta_1' \cup \theta_2') = 1$. Asuma que $f(p) = 1$. Entonces $f(\theta_1' \cup \{p\}) = f(\theta_1) = 1$; es decir, θ_1 es satisfacible, lo que es una contradicción. De la misma forma si $f(p) = 0$ podemos concluir que $f(\theta_2) = 1$, lo que es una contradicción.

2. Un *literal* es una variable proposicional p o su negación $\neg p$. Decimos que p es un literal *positivo* y que $\neg p$ es un literal *negativo*.

   Una *cláusula* es una disyunción de literales. Una cláusula es de *Horn* si y solo si contiene a lo más un literal positivo. Una fórmula es de *Horn* si y solo si es una conjunción de cláusulas de Horn.

   Demuestre que existe una cláusula que no es equivalente a ninguna fórmula de Horn.

   Solución: Demostraremos lo siguiente: Sea $P = \{p, q\}$. Para cada fórmula de Horn ϕ en $L(P)$ tal que ninguna cláusula en ϕ es una tautología, existe fila f de la tabla de verdad tal que $f(p \vee q) = 1$ y $f(\phi) = 0$. Esto quiere decir que $p \vee q$ no es equivalente a ninguna fórmula de Horn.

   La demostración es por inducción en el número de cláusulas en ϕ. El caso base considera que ϕ tiene una sola cláusula. Debemos ir por casos. Si la cláusula no contiene literales positivos entonces la fila tal que $f(p) = f(q) = 1$ satisface $f(p \vee q) = 1$ y $f(\phi) = 0$. Si la cláusula contiene al literal positivo p entonces la fila f tal que $f(p) = 0$ y $f(q) = 1$ satisface $f(p \vee q) = 1$ y $f(\phi) = 0$ (ya que ϕ no contiene a $\neg p$). Análogamente si q es el único literal positivo en ϕ.

   Asuma para el caso inductivo que la propiedad es cierta para cada fórmula de Horn con n cláusulas. Sea ϕ una fórmula de Horn con $n + 1$ cláusulas y sea ϕ' una fórmula de Horn cualquiera obtenida desde ϕ eliminando una cláusula. Por tanto, existe fila f tal que $f(p \vee q) = 1$ y $f(\phi') = 0$ (ya que ϕ' no contiene cláusulas que son tautologías). Por tanto $f(\phi) = 0$.

3. Considere como dominio de discurso un conjunto P de seres humanos, y sean *Amante* y *Jefe* dos predicados binarios interpretados sobre P como el conjunto de pares (p_1, p_2) tal que p_1 es el jefe de p_2 y p_1 es el amante de p_2, respectivamente.

   Represente, usando solo los predicados binarios mostrados anteriormente, las siguientes propiedades del dominio de discurso P usando lógica de primer orden:

   a) La relación *Amante* es conmutativa (o simétrica).

   $$\forall x \forall y (Amante(x, y) \rightarrow Amante(y, x)).$$

   b) La relación *Jefe* es transitiva (i.e. el jefe de mi jefe es también mi jefe) pero no conmutativa (i.e. nadie es jefe de su propio jefe).

   $$\forall x \forall y \forall z (Jefe(x, y) \wedge Jefe(y, z) \rightarrow Jefe(x, z)) \wedge \neg \exists x \exists y (Jefe(x, y) \wedge Jefe(y, x)).$$

   c) Nadie es jefe de su amante.

   $$\forall x \forall y (Amante(x, y) \rightarrow \neg Jefe(x, y)).$$

   d) Ningún amante tiene más de dos jefes.

   $$\forall x (\exists y Amante(x, y) \rightarrow \neg \exists z_1 \exists z_2 (Jefe(z_1, x) \wedge Jefe(z_2, x) \wedge z_1 \neq z_2)).$$

   e) Si dos personas tienen los mismos jefes entonces tienen los mismos amantes.

   $$\forall x \forall y (\forall u (Jefe(u, x) \leftrightarrow Jefe(u, y)) \rightarrow \forall z (Amante(z, x) \leftrightarrow Amante(z, y))).$$

   f) Existe una persona que es jefe y tal que cada uno de sus empleados es amante de alguien.

   $$\exists x (\exists y Jefe(x, y) \wedge \forall z (Jefe(x, z) \rightarrow \exists u Amante(z, u))).$$