UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 1 - Semestre Primavera 2015

1. Considere la siguiente inferencia:

$$\begin{array}{l} \forall x(L(x) \rightarrow F(x)) \\ \exists x(L(x) \land \neg C(x)) \\ \hline \exists x(F(x) \land \neg C(x)) \end{array}$$

Demuestre su correctitud a partir de las siguientes reglas de inferencia:

$$\begin{array}{l} \forall x P(x) \\ \hline P(c) \text{ para cualquier } c \text{ arbitrario} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \exists x P(x) \\ \hline P(c) \text{ para algún } c \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P(c) \text{ para cualquier } c \text{ arbitrario} \\ \hline \forall x P(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l} P(c) \text{ para algún } c \\ \hline \exists x P(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \land q \\ \hline p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \land q \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \\ q \\ \hline p \land q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{l} \exists x(L(x) \land \neg C(x)) \\ \hline L(c) \land \neg C(c) \text{ para algún } c \\ \hline L(c) \\ \neg C(c) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \forall x(L(x) \rightarrow F(x)) \\ \hline L(d) \rightarrow F(d) \text{ para cualquier } d \text{ arbitrario} \\ \hline L(c) \rightarrow F(c) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L(c) \\ L(c) \rightarrow F(c) \\ \hline F(c) \\ \hline F(c) \land \neg C(c) \\ \hline \exists x(F(x) \land \neg C(x)) \end{array}$$

2. Considere las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall x \exists y\, P(x,y) \\ (2) & \forall x \forall y\, P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x) \\ (3) & \forall x \forall y \forall z\, P(x,y) \land P(y,z) \rightarrow P(x,z) \end{array}$$

a) Demuestre que existe un dominio de discurso no vacío A y una interpretación del predicado P sobre A que satisface esas fórmulas.

b) Deduzca que $\forall x \forall y\ (P(x, y) \vee P(y, x))$ o dé un dominio de discurso y una interpretación de P donde esto no se satisfaga.

c) Demuestre que ningún dominio de discurso A puede ser finito en este caso.

Solución:

a) Una interpretación posible es el menor estricto en los naturales o los reales.

b) Por ejemplo en los complejos, con $(a, b) < (c, d)$ sii $a < c$ y $b < d$, no vale.

c) Mostraremos que todo dominio A contiene una cadena $P(x_1, x_2) \wedge \ \ldots \ \wedge P(x_{n-1}, x_n)$ donde todos los x_i son distintos, para todo n. Notar que vale $P(x_i, x_j)$ para todo $i < j$ en la cadena, por (3) (puede ser inducción o que simplemente lo observen).

El caso $n = 1$ es trivial dado que A no es vacío. Sea por HI una cadena de largo n. Entonces por (1) existe y tal que $P(x_n, y)$. Como vale $P(x_i, x_n)$ para todo $1 \leq i < n$, por (3) vale también $P(x_i, y)$. Por lo tanto, no puede ser $y = x_i$ porque entonces tenemos $P(y, y)$, lo cual por (2) implica $\neg P(y, y)$, que es una contradicción. Por lo tanto, y es distinto de todos los otros y podemos nombrar $x_{n+1} = y$.

Ahora, $|A|$ no puede ser finito porque contendría una cadena de $|A| + 1$ elementos distintos.

3. Construya un conjunto de axiomas para describir que $P(x, y)$ es un preorden, $Q(x, y)$ es la relación de equivalencia asociada, $q(x)$ es la clase de equivalencia de x, y $R(X, Y)$ es la relación inducida sobre las clases de clase de equivalencia de x. Úselos para demostrar, mediante reglas de inferencia, que $R(X, Y)$ es un orden, por ejemplo la transitividad se ve como
$\forall x \forall y \forall z\ (R(q(x), q(y)) \ \wedge \ R(q(y), q(z)) \ \rightarrow \ R(q(x), q(z)))$.
Puede agregar las reglas de inferencia que necesite de la lógica proposicional (por ejemplo, puede ser útil que de q se deduce $p \rightarrow q$). Note que existen dos dominios, el de los elementos x y el de las clases de equivalencia X. Que eso no lo amilane.

Solución:

Deben tener los axiomas $\forall x\ P(x, x)$ y $\forall x \forall y\ (P(x, y) \ \wedge \ P(y, z) \ \rightarrow P(x, y))$ para el preorden. Para la equivalencia deben tener $\forall x \forall y\ (Q(x, y) \ \leftrightarrow \ P(x, y) \ \wedge \ P(y, x))$. Para la función, deben tener $\forall x \forall y\ (q(x) = q(y) \ \leftrightarrow \ Q(x, y))$. Finalmente, $\forall x \forall y\ R(q(x), q(y)) \ \leftrightarrow \ P(x, y)$.

Para la segunda parte, deben demostrar
(1) $\forall x\ R(q(x), q(x))$,
(2) $\forall x \forall y\ (R(q(x), q(y)) \ \wedge \ R(q(y), q(x)) \ \rightarrow \ q(x) = q(y))$,
y (3) que está en el enunciado.

Para (1), obtenemos $P(c, d) \ \rightarrow \ R(q(c), q(d))$ para todo c, d, luego $P(e, e)$ para todo e, y eligiendo $e = c = d$, $P(e, e) \ \rightarrow R(q(e), q(e))$, por lo tanto $R(q(e), q(e))$, y finalmente $\forall x R(q(x), q(x))$.

Para (2), saltando detalles, se deduce $P(c, d) \wedge P(d, c)$, de ello $Q(c, d)$ y de ello $q(c) = q(d)$. De ello, usando una regla como que de q se deduce $p \rightarrow q$, deducimos $(P(c, d) \ \wedge \ P(d, c)) \ \rightarrow \ q(c) = q(d)$, y luego generalización. Omito la (3), que es fácil.

4. Demuestre que la relación $R = \{(f, g), f(n) \text{ es } O(g(n))\}$ es un preorden. ¿A qué corresponde la relación de equivalencia asociada? ¿Cuáles son las clases de equivalencia?

Solución: Deben demostrar que $f(n)$ es $O(f(n))$ y que si $f(n)$ es $O(g(n))$ y $g(n)$ es $O(h(n))$, entonces $f(n)$ es $O(h(n))$. La primera es trivial. Para la segunda, tenemos que existen n_1 y c_1 tal que $f(n) \leq c_1 \cdot g(n)$ para todo $n > n_1$, y que existen n_2 y c_2 tal que $g(n) \leq c_2 \cdot h(n)$ para todo $n > n_2$. Entonces, para todo $n > \text{máx}(n_1, n_2)$, $f(n) \leq c_1 \cdot c_2 \cdot h(n)$.

La relación de equivalencia es que $f(n)$ es $\Theta(g(n))$, pues equivale a que $f(n)$ es $O(g(n))$ y $g(n)$ es $O(f(n))$. Y las clases de equivalencia son los conjuntos de funciones donde uno es theta del otro.