UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 1 - Semestre Otoño 2015

1. *a*) (4pts) ¿Es cierto que existen un conjunto A y relaciones binarias R y S sobre A tal que el resultado de la siguiente expresión es no vacío?

$$\big((R \circ R) \circ R\big) \ - \ \Big(\big(((R \circ R) - S) \circ R\big) \cup (S \circ R)\Big).$$

Solución: Esto no es posible. Asuma lo contrario. Entonces existe par (a,b) en la evaluación de esta expresión. Por tanto, $(a,b) \in (R \circ R) \circ R$, es decir, existen $c,d \in A$ tal que $(a,c),(c,d),(d,b) \in R$. Por otra parte, $(a,b) \not\in ((R \circ R) - S) \circ R$, lo que implica que $(a,d) \in S$. Pero entonces $(a,b) \in S \circ R$, lo que es una contradicción.

b) (2pts) Demuestre que existe un conjunto A y una relación binaria R tal que el resultado de la siguiente expresión es no vacío:

$$\big(R \circ (R \cap (R \circ R))\big) \ - \ \big(((R \circ R) - R) \circ R\big).$$

Solución: Basta considerar $A = \{1,2,3,4\}$ y $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(1,3),(2,4)\}$.

2. Sea $X = \{x_1, \dots, x_{3n}\}$ un conjunto de $3n$ elementos ($n \geq 1$) y λ una función que asigna un entero positivo a cada elemento $x \in X$. Construya una fórmula en la lógica proposicional que sea satisfacible si y solo si existen conjuntos $Z_1, \dots, Z_n$ tales que:

   a) Los Z_i's definen una *partición* de X; es decir, $X = \bigcup_{1 \leq i \leq n} Z_i$ y $Z_i \cap Z_j = \emptyset$, para cada $1 \leq i < j \leq n$.

   b) Para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que el conjunto Z_i contiene exactamente tres elementos.

   c) Los elementos en cada conjunto Z_i suman lo mismo. Formalmente, existe entero positivo t tal que para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que si $Z_i = \{a,b,c\}$ entonces $\lambda(a) + \lambda(b) + \lambda(c) = t$.

El tamaño de su fórmula debe ser a lo más $O(n^c)$, para c una constante positiva.

Hint: Utilice variables proposicionales p_{ijk}, para $1 \leq i < j < k \leq 3n$, que expresen (intuitivamente) que $Z_l = \{x_i, x_j, x_k\}$, para algún $1 \leq l \leq n$.

Solución: Primero debemos expresar que cada i pertenece a algún Z_l. Para ello basta decir que para todo $1 \leq i \leq 3n$ existe una variable proposicional de la forma p_{ijk}, p_{jik}, o p_{jki} que es cierta. Esto lo hacemos mediante la fórmula:

$$\phi_1 \ := \bigwedge_{1 \leq i \leq 3n} \ \bigvee_{1 \leq j < k \leq n, i, i \neq j, i \neq k} p_{ijk} \vee p_{jik} \vee p_{jki}$$

Además, debemos decir que no es cierto que i pertenezca a dos Z_l's distintos. Para ellos basta utilizar la fórmula ϕ_2 que aparece a continuación:

$$\phi_2 \;:=\; \bigwedge_{1\leq i\leq 3n}\ \bigwedge_{1\leq j<k\leq n, i, i\neq j, i\neq k}\left((p_{ijk}\vee p_{jik}\vee p_{jki})\ \rightarrow \neg(\bigvee_{1\leq j'<k'\leq 3n, j\,\neq\, j' \text{ or } k\,\neq\, k'} p_{ij'k'}\vee p_{j'ik'}\vee p_{j'k'i})\right).$$

Con esto ya sabemos que cualquier valuación que hace verdadera a $\phi_1 \wedge \phi_2$ naturalmente define una partición de X en conjuntos de tres elementos.

Finalmente debemos decir que todos los Z_l's suman lo mismo. Para eso, sea A el conjunto de todas las tuplas (i, j, k, i', j', k') , $1 \leq i, j, k, i', j', k' \leq 3n$, que cumplen $i \neq i'$ o $j \neq j'$ o $k \neq k'$ y $\lambda(x_i) + \lambda(x_j) + \lambda(x_k) \neq \lambda(x_{i'}) + \lambda(x_{j'}) + \lambda(x_{k'})$. Nos basta considerar entonces la fórmula ϕ_3 definida como sigue:

$$\bigwedge_{(i,j,k,i',j',k')\in A} \neg(p_{ijk} \wedge p_{i'j'k'}).$$

Claramente $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$ es satisfacible si y solo si existen los conjuntos Z_l's con las condiciones antes especificadas. Además, el tamaño de la fórmula resultante es $O(n^c)$, para alguna constante $c \geq 3$.

3. Sea σ el vocabulario que contiene una sola relación ternaria $B(\cdot, \cdot, \cdot)$. Considere como dominio D al conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y asuma que interpretamos a la relación B en D como *estar entre medio*; formalmente esto quiere decir que interpretamos a B como el subconjunto de $D \times D \times D$ que contiene todos aquellos triples (x, y, z) tales que y pertenece a la recta que une x con z. Exprese lo siguiente en la lógica de primer orden:

   a) (1pto) Para todo punto x, el único punto que está entre medio de x y x es x mismo.

   Solución: $\forall x \forall y (B(x, y, x) \rightarrow x = y)$.

   b) (1pto) Existen tres puntos que no son colineales.

   Solución: $\exists x \exists y \exists z (\neg B(x, y, z) \wedge \neg B(y, x, z) \wedge \neg B(x, z, y))$.

   c) (2pts) Para cualquiera tres puntos no colineales x, y, z, cualquier punto u en el segmento xy y cualquier punto v en el segmento yz, los segmentos xv e zu deben intersectarse.

   Solución: $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \big((B(x, y, z) \vee B(y, x, z) \vee B(x, z, y))\ \vee\ (B(x, u, y) \wedge B(y, v, z) \rightarrow \exists w (B(u, w, z) \wedge B(v, w, x)))\big)$.

   d) Asuma ahora que nuestro vocabulario se extiende con una relación C de aridad cuatro que se interpreta en D como la *congruencia*; es decir, como todas aquellas tuplas $(x, y, w, z) \in D \times D \times D \times D$ tal que los segmentos xy y wz son del mismo largo.

   Cada vez que tenemos tres puntos x, y, z tal que cada uno de ellos es equidistante de un par de puntos distintos u y v, entonces x, y, z son colineales.

   Solución: $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \big((u \neq v \wedge C(x, u, x, v) \wedge C(y, u, y, v) \wedge C(z, u, z, v))\ \rightarrow\ (B(x, y, z) \vee B(y, x, z) \vee B(x, z, y))\big)$.