UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 1 - Semestre Primavera 2013

1. *a*) Demuestre que las siguientes fórmulas son equivalentes:

$$(1)\ \exists x(A(x) \to B(x)) \qquad (2)\ \forall x A(x) \to \exists x B(x)$$

b) Demuestre que existe un dominio de discurso A y una interpretación de la relación binaria P sobre A que satisface la siguiente fórmula:

$$\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x \forall y_1 \forall y_2 (P(x,y_1) \wedge P(x,y_2) \to y_1 = y_2) \wedge \\ \forall x_1 \forall x_2 \forall y (P(x_1,y) \wedge P(x_2,y) \to x_1 = x_2) \wedge \neg \forall y \exists x P(x,y).$$

¿Es posible que A sea un conjunto finito?

Solución:

a) Asuma que (1) es cierto y que $\forall x A(x)$. Dado que no existe un elemento c tal que $\neg A(c)$ entonces debe existir un elemento d tal que $A(d) \wedge B(d)$. Luego, $\exists x B(x)$ es cierto. Asuma al contrario que (2) es cierto. Si $\forall x A(x)$ es falso, es decir $\neg A(c)$ para algún c, entonces $A(c) \to B(c)$, por lo que $\exists x(A(x) \to B(x))$ es cierto. Al contrario, asuma que $\forall x A(x)$ es verdadero. Entonces $\exists x B(x)$ es cierto, y por tanto existe un elemento c tal que $B(c)$ es cierto. Además, $A(c)$ es cierto pues $\forall x A(x)$ es cierto. Concluímos que (1) es cierto.

b) La fórmula dice que $P(x,y)$ define una función f en el dominio tal que $f(x) = y$. Además, esa función es 1-1 y existe un elemento del dominio que no es imagen de ningún elemento bajo f (es decir, f no es sobre). Claramente, si el dominio de discurso es $\mathbb{N}$ y P contiene a los pares $(a, 2a)$, para $a \in \mathbb{N}$, esto se cumple.

Toda función 1-1 en un dominio finito debe ser sobre. Por tanto, ϕ no puede satisfacerse ahí.

2. Considere el dominio de discurso que contiene los primeros n números naturales $\{1, \dots, n\}$, y asuma que S es la relación binaria de sucesor sobre estos números (es decir, S contiene los pares $(j, j+1)$, para $1 \leq j < n$).

Asuma que existen otras dos relaciones binarias R_a y R_b sobre este dominio. Construya una fórmula de la lógica de predicados que exprese que todas las siguientes condiciones se cumplen:

a) (1pto) La unión de las relaciones R_a y R_b corresponde a S.

b) (1 pto) La intersección entre R_a y R_b es vacía.

c) (2 pts) $R_a = \{(j, j+1) \mid 1 \leq j < n \text{ y } j \text{ es impar}\}$.
Hint: Exprese que el par $(1,2)$ pertenece a R_a y que si un par $(i, i+1)$ pertenece a R_a (resp. R_b) entonces $(i+1, i+2)$ pertenece a R_b (resp. R_a).

La fórmula que usted construya solo puede utilizar los predicados S, R_a y R_b.

¿Es posible detectar con una fórmula en la lógica de predicados si n es par en el caso que (1-3) se cumpla? (2 pts).

Solución: Expresamos lo siguiente:

- La unión de las relaciones R_a y R_b corresponde a S:

$$\forall x \forall y \big((R_a(x,y) \vee R_b(x,y)) \leftrightarrow S(x,y) \big).$$

- La intersección entre R_a y R_b es vacía:

$$\neg \exists x \exists y \big(R_a(x,y) \wedge R_b(x,y) \big),$$

  o bien

$$\forall x \forall y \big(R_a(x,y) \rightarrow \neg R_b(x,y) \big).$$

- $R_a = \{(j, j+1) \mid 1 \leq j < n$ y j es impar$\}$.
  - Primero identificamos al número 1 mediante la formula $\phi(x) = \neg \exists y S(y,x)$.
  - Luego decimos que R_a contiene al par $(1,2)$:

$$\forall x \forall y \big(\phi(x) \wedge S(x,y) \rightarrow R_a(x,y) \big).$$

  - Finalmente expresamos que R_a y R_b alternan entre pares e impares:

$$\forall x \forall y \forall z \big(S(x,y) \wedge S(y,z) \rightarrow (R_a(x,y) \leftrightarrow R_b(y,z)) \big).$$

Además, podemos detectar si n es par simplemente chequeando que R_a contenga al par $(n-1, n)$. Es decir, primero definimos al último elemento n mediante la fórmula $\neg \exists y S(x,y)$, y luego expresamos $\forall x \forall y (S(x,y) \wedge \psi(y) \rightarrow R_a(x,y))$.

3. Sea P un conjunto de variables proposicionales.

- Un *literal* es una variable proposicional p en P o su negación $\neg p$.
- Una *cláusula* es una disyunción de literales. Por ejemplo, $(p \vee q \vee \neg r)$ es una claúsula.
- Una claúsula es semi-positiva si es de la forma (a) p ó (b) $(p \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \cdots \vee \neg q_n)$ ó (c) $(\neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \cdots \vee \neg q_n)$. Es decir, la cláusula es semi-positiva si a lo más uno de sus literales no es de la forma $\neg q$ para $q \in P$.

  Por ejemplo, $(p \vee q \vee \neg r)$ no es una cláusula semi-positiva, pero (a) p, (b) $(p \vee \neg r)$ y (c) $\neg r$ sí lo son.

Sea Σ un conjunto de cláusulas semi-positivas sobre un conjunto finito de variables proposicionales P. Demuestre que si procedimiento CONSISTENCIA que se especifica abajo falla entonces Σ es insatisfacible.

CONSISTENCIA

1. $L_{\text{old}} = P$; $L_{\text{new}} = \emptyset$

2. **while** $L_{\text{new}} \neq L_{\text{old}}$ **do**
3. $L_{\text{old}} = L_{\text{new}}$
4. **if** existe cláusula semi-positiva $(\neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \cdots \vee \neg q_n) \in \Sigma$ tal que $\{q_1, \ldots, q_n\} \subseteq L_{\text{old}}$
5. **then** el procedimiento falla y se detiene
6. **else**
7. **if** L es el conjunto de variables $p \in P$ tal que:
   (i) existe cláusula semi-positiva p en Σ tal que $p \notin L_{\text{old}}$, ó
   (ii) existe cláusula semi-positiva $(p \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \cdots \vee \neg q_n)$ en Σ tal que
   $\{q_1, \ldots, q_n\} \subseteq L_{\text{old}}$ y $p \notin L_{\text{old}}$
8. **then** $L_{\text{new}} = L_{\text{old}} \cup L$

Solución: El procedimiento puede realizar a lo más $|P|$ iteraciones. Asuma $|P| = n$ y que el procedimiento falla en el paso $1 \leq i \leq n$. Demostraremos lo siguiente:

(*) Si L_j es el valor computado de L_{new} en la iteración L_j, para $1 \leq j < i$, entonces si Σ es satisfacible por asignación $\sigma : P \to \{0, 1\}$ se debe cumplir que $\sigma(p) = 1$ para cada $p \in L_j$.

Esto es suficiente para demostrar que Σ es insatisfacible. En efecto, si el procedimiento falla en paso i es porque existe cláusula $(\neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_m)$ en Σ tal que $\{q_1, \ldots, q_m\} \in L_{i-1}$. Asuma por contradicción que Σ es satsfacible por asignación $\sigma : P \to \{0, 1\}$. Por (*) debe ser el caso que $\sigma(q_k) = 1$ para todo $1 \leq k \leq m$. Pero σ satisface la fórmula $(\neg q_1 \vee \cdots \vee \neg q_m)$, lo que es una contradicción.

Demostraremos ahora (*) por inducción en j. El caso base es $j = 1$. En este caso L_1 contiene todas las variables proposicionales p tal que p es cláusula en Σ. Claramente si σ satisface a Σ entonces $\sigma(p) = 1$ para cada $p \in L_1$.

Asuma entonces que la propiedad es cierta para $1 \leq j \leq i - 2$. Por definición $L_{j+1} = L_j \cup L$, donde L es el conjunto de todos los $p \notin L_j$ tal que existe claúsula $(p \vee \neg r_1 \vee \neg r_2 \vee \cdots \vee \neg r_s)$ en Σ para la cual se cumple que $\{r_1, \ldots, r_s\} \in L_j$. Por HI, si σ satisface a Σ entonces $\sigma(r_1) = \cdots = \sigma(r_s) = 1$. Pero σ satisface también a $(p \vee \neg r_1 \vee \neg r_2 \vee \cdots \vee \neg r_s)$, por lo que $\sigma(p) = 1$. Concluímos que $\sigma(p) = 1$ para todo $p \in L_{j+1}$.

Otra solución aceptable es notar que las cláusulas semi-positivas $(p \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \cdots \vee \neg q_n)$ son equivalentes a $(q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_n \to p)$, por lo tanto la línea 7(i) agrega a L_{new} proposiciones p que son consecuencia lógica de Σ, y la 7(ii) también, cuando ya se tiene que las q_i son consecuencia lógica de Σ, pues se aplica la regla de deducción. Entonces se declara una contradicción cuando se tiene que $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ son consecuencia lógica de Σ pero también $(\neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \cdots \vee \neg q_n)$ está en Σ, con lo cual se deriva una contradicción de Σ.