UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 1 (Solución)

1. (1,5 puntos) Sea $P = \{p, q, \dots\}$ un conjunto de proposiciones y sea f una fila de la tabla de verdad para las proposiciones en P. Defina Σ_f como el conjunto de todas las oraciones de la lógica proposicional que utilizan proposiciones en P y cuyo valor de verdad es 1 en la fila f.

   Demuestre que para cualquier conjunto Σ de oraciones que utilizan proposiciones en P, si $\Sigma_f \subseteq \Sigma$ y Σ es satisfacible, entonces $\Sigma_f = \Sigma$.

   Solución: Asuma, en búsqueda de una contradicción, que $\Sigma_f \subsetneqq \Sigma$. Por tanto, existe oración $\phi \in \Sigma \setminus \Sigma_f$. Esto implica que el valor de verdad de ϕ en f es 0. Por tanto, el valor de verdad de $\neg\phi$ en f es 1. Conlcuimos que $\neg\phi \in \Sigma_f$, y por tanto, que $\neg\phi \in \Sigma$. Pero entonces Σ no es satisfacible porque contiene tanto a ϕ como a $\neg\phi$.

2. (1,5 puntos) Un grafo G es una tupla (N, A), donde N es un conjunto de nodos y $A \subseteq N \times N$ es un conjunto de arcos. Un grafo es no dirigido si cada vez que $(a, b) \in A$ se tiene que $(b, a) \in A$.

   Un grafo no dirigido $G = (N, A)$ es 3-coloreable si existe una asignación de colores para los nodos tal que nodos adyacentes reciben colores distintos. Formalmente, G es 3-coloreable si existe una función $f : N \to \{\mathit{blanco}, \mathit{azul}, \mathit{rojo}\}$ tal que para cada $(a, b) \in A$ se tiene que $f(a) \neq f(b)$.

   Demuestre que el problema de 3-coloración puede ser reducido al problema de satisfacibilidad. Vale decir, demuestre que para cada grafo G existe una oración proposicional φ_G tal que G es 3-coloreable si y sólo si φ_G es satisfacible.

   Solución: Sea $G = (N, A)$ un grafo. El conjunto de variables proposicionales que usaremos es: $\{p_i^B, p_i^A, p_i^R \mid i \in N\}$. Intuitivamente la variable proposicional p_i^B representa que el nodo i es coloreado blanco. Equivalentemente, p_i^A y p_i^R con respecto a los colores azul y rojo, respectivamente.

   La oración φ_G es definida como la conjunción de las oraciones α y β, tal que:

   a) La oración α se define como:

   $$\bigwedge_{i \in N} (p_i^A \wedge \neg p_i^R \wedge \neg p_i^B) \vee (p_i^B \wedge \neg p_i^R \wedge \neg p_i^A) \vee (p_i^R \wedge \neg p_i^B \wedge \neg p_i^A).$$

   Es decir, cada nodo $i \in N$ recibe un, y solo un, color entre rojo, blanco y azul;

   b) la oración β se define como:

   $$\bigwedge_{i,j \in A} (p_i^A \to \neg p_j^A) \wedge (p_i^R \to \neg p_j^R) \wedge (p_i^B \to \neg p_j^B).$$

   Es decir, no existe un par de nodos adyacentes que se le asigne el mismo color.

Es inmediato que G es 3-coloreable si y sólo si φ_G es satisfacible.

3. Sea $x \subseteq y$ un predicado binario. Intuitivamente $\subseteq$ representa la relación de subconjunto; es decir, $x \subseteq y$ representa que x es un subconjunto de y.

   Exprese en lógica de primer orden las siguientes propiedades del predicado $x \subseteq y$:

   - La relación $x \subseteq y$ es un orden parcial; i.e. es refleja, antisimétrica y transitiva.

     Solución: $\forall x \forall y \forall z (x \subseteq x \wedge (x \subseteq y \wedge y \subseteq x \rightarrow x = y) \wedge (x \subseteq y \wedge y \subseteq z \rightarrow x \subseteq z)$.
   - Existe un único elemento $\perp$ que está contenido en cualquier otro conjunto (i.e. el conjunto vacío).

     Solución: $\exists y (\forall x (y \subseteq x) \wedge \forall z (\forall w (z \subseteq w) \rightarrow y = z))$.
   - Existe un único conjunto $\top$ que contiene a todo otro conjunto (es decir, el conjunto universo).

     Solución: $\exists y (\forall x (x \subseteq y) \wedge \forall z (\forall w (w \subseteq z) \rightarrow y = z))$.
   - La unión de dos conjuntos siempre existe, y además es única (note que $x \cup y = z$ si y sólo si z es el "menor" conjunto con respecto al orden parcial $\subseteq$ que contiene tanto a x como a y).

     Solución: $\forall x \forall y \exists z (x \subseteq z \wedge y \subseteq z \wedge \forall w (x \subseteq w \wedge y \subseteq w \rightarrow z \subseteq w)))$.
   - La intersección de dos conjuntos siempre existe, y además es única (note que $x \cap y = z$ si y sólo si z es el "mayor" conjunto con respecto al orden parcial $\subseteq$ que está contenida tanto en x como en y).

     Solución: $\forall x \forall y \exists z (z \subseteq x \wedge z \subseteq y \wedge \forall w (w \subseteq x \wedge w \subseteq y \rightarrow w \subseteq z)))$.
   - Todo conjunto tiene un *complemento*; es decir, para todo conjunto x existe un conjunto $\bar{x}$ tal que $x \cap \bar{x} = \perp$ y $x \cup \bar{x} = \top$.

     Solución: $\forall x \exists y (\forall z (x \subseteq z \wedge y \subseteq z \rightarrow \forall w (w \subseteq z)) \wedge \forall z (z \subseteq x \wedge z \subseteq y \rightarrow \forall w (z \subseteq w)))$.

4. (1,5 puntos)

   - Sea R una relación en A. Demuestre que si R es simétrica y transitiva, y además para cada $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $(a, b) \in R$, entonces R es refleja.

     Solución: Sea a un elemento cualquiera en A. Por hipótesis existe $b \in A$ tal que $(a, b) \in R$. Dado que R es simétrica, $(b, a) \in R$. Por transitividad de R, $(a, a) \in R$. Concluimos que R es refleja.
   - Sea R una relación simétrica en A. Para cada $a \in A$ defina

     $$N(a) = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}.$$

     Demuestre que para cada $a, b \in A$, $a \in N(b) \Leftrightarrow b \in N(a)$.

     Solución: $a \in N(b) \Leftrightarrow (b, a) \in R \Leftrightarrow (a, b) \in R \Leftrightarrow b \in N(a)$.