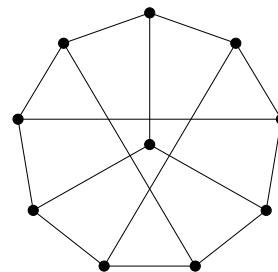
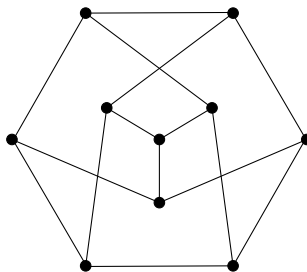
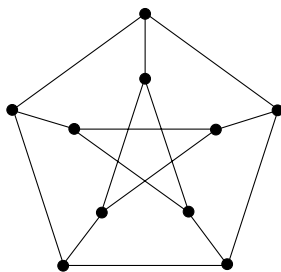
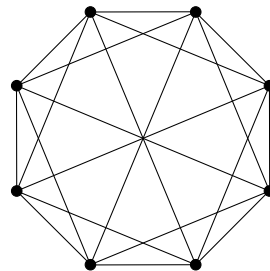
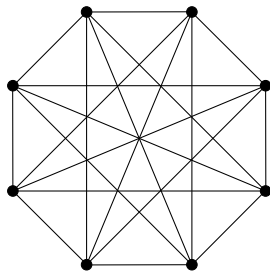


Guía Grafos

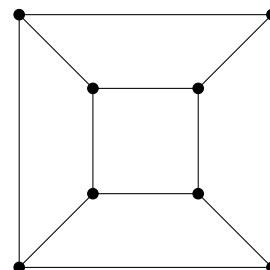
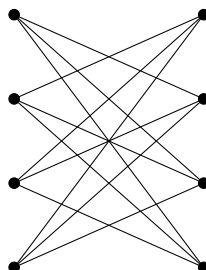
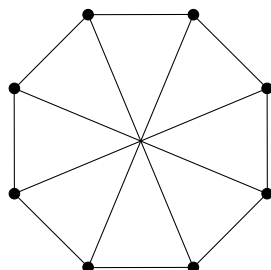
1. Muestre que los siguientes tres grafos son isomorfos. Muestre la función biyectiva que define el isomorfismo.



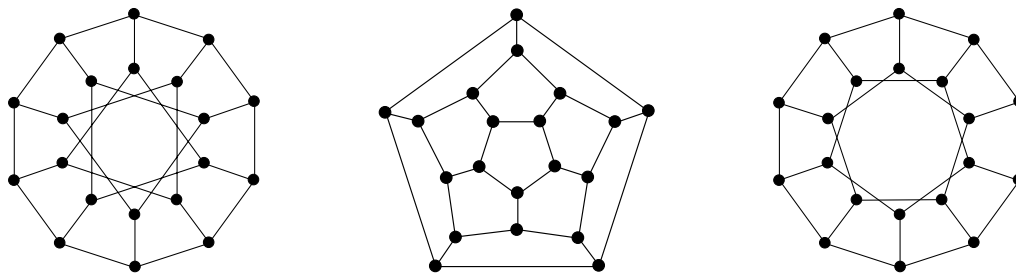
2. Determine si los siguientes grafos son o no isomorfos, si lo son muestre una función biyectiva que defina el isomorfismo.



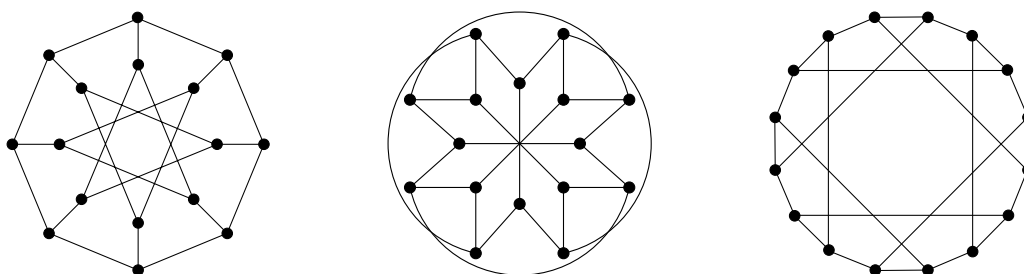
3. Determine cuáles pares de los siguientes grafos son isomorfos. Para los pares isomorfos muestre una función biyectiva que defina el isomorfismo.



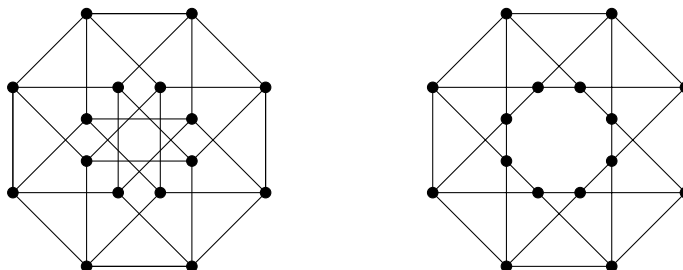
4. Determine cuáles pares de los siguientes grafos son isomorfos. Para los pares isomorfos muestre una función biyectiva que defina el isomorfismo.



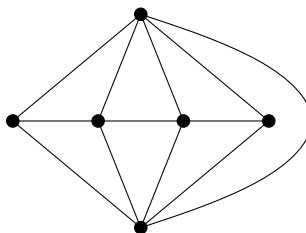
5. Determine cuáles pares de los siguientes grafos son isomorfos. Para los pares isomorfos muestre una función biyectiva que defina el isomorfismo.



6. Determine si los siguientes grafos son bipartitos, y si son o no isomorfos. Si son isomorfos muestre una función biyectiva que defina el isomorfismo, si son bipartitos muestre los conjuntos que forman la bipartición.

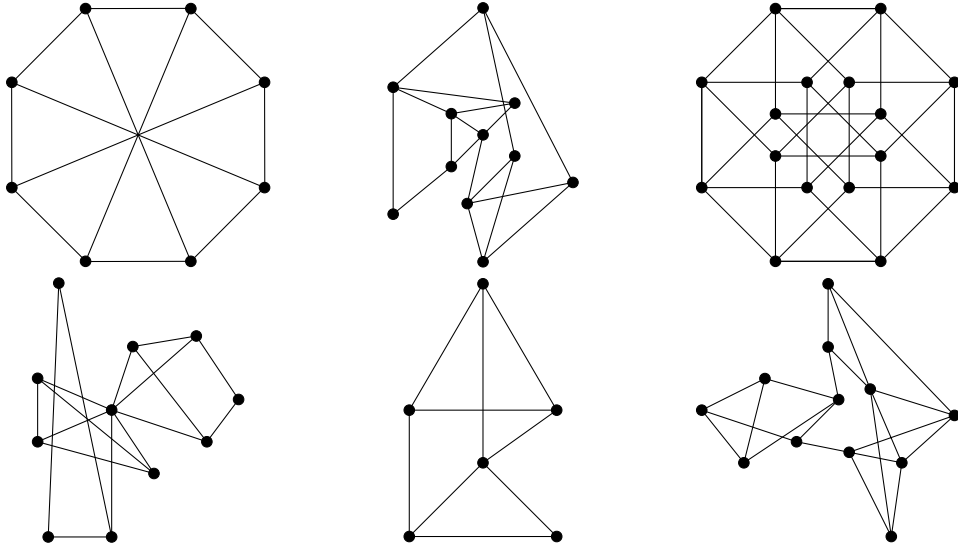


7. Considere las clases de grafos: *A*) caminos, *B*) ciclos, *C*) grafos completos y *D*) grafos bipartitos. Para cada par de las clases nombradas, encuentre todos los grafos que pertenecen a ambas clases, por ejemplo, $P_1 \cong K_2$ por lo que el camino de dos vértices pertenece a las clases *A*) y *C*).
8. Encuentre una fórmula explícita para la cantidad de aristas de H_n , el hipercubo de n dimensiones.
9. Determine el tamaño máximo de un clique y de un conjunto independiente en el siguiente grafo.



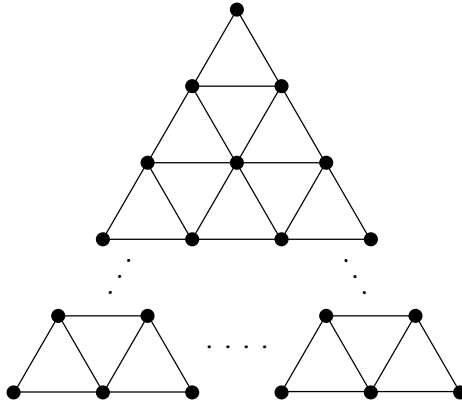
10. Determine si el grafo de Petersen (ver apuntes) es o no bipartito y encuentre el tamaño del conjunto independiente más grande en él y del clique más grandes en él.
11. Recuerde que un grafo G se dice autocomplementario si G es isomorfo a \overline{G} (G es isomorfo a su complemento).
- Encuentre un grafo con 5 vértices que sea autocomplementario.
 - ¿Puede un grafo con 3 vértices ser autocomplementario? ¿Y uno con 6 vértices?
 - Demuestre que si un grafo con n vértices es autocomplementario entonces necesariamente $n(n-1)$ es divisible por 4. (Ayuda: Piense en el grafo completo K_n y en la cantidad de aristas de G y \overline{G} con respecto a las aristas de K_n .)
12. Sea I_n la matriz identidad de $n \times n$. Sea $F_{m,n,k}$ una matriz de $m \times n$ que tiene ceros en todas sus posiciones excepto en su fila k en la que tiene sólo unos. Sea $A_{(m,n)}$ la siguiente matriz de incidencia.
- $$A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} I_n & I_n & \cdots & I_n \\ F_{m,n,1} & F_{m,n,2} & \cdots & F_{m,n,m} \end{bmatrix}$$
- Dibuje $A_{(3,2)}$ y su grafo asociado.
 - ¿A qué grafo representa $A_{(m,n)}$? Demuéstrelo.
13. Sea I_n la matriz identidad de $n \times n$, y sea O_n la matriz de $n \times n$ con sólo ceros. Construya a partir de I_n y O_n la matriz de adyacencia de $K_{m,n}$.
14. Demuestre que no es posible organizar un campeonato de fútbol con 10 equipos en el que los tres mejores equipos (previamente seleccionados) jueguen entre ellos todos contra todos y contra los dos mejores de los 7 equipos restantes y tal que para encontrar a los dos mejores de entre los 7 restantes se cada equipo juegue tres partidos, cada uno con un equipo distinto.
15. Determine si K_4 contiene
- Una caminata que no sea un camino.
 - Un camino no cerrado que repita vértices.
 - Un camino cerrado que no sea un ciclo.
16. Sea $G = (V(G), E(G))$ tal que el conjunto de vértices es $V(G) = \{1, 2, \dots, 15\}$, y un par $ij \in E(G)$ si y sólo si $i \neq j$, y ocurre que i y j tienen un divisor común distinto de 1. Cuente las componentes conexas de G y encuentre el tamaño del camino más largo en G .
17. Diga verdadero o falso justificando su respuesta en cada caso.
- Si G es un grafo no conexo entonces tiene un vértice aislado (un vértice de grado 0).
 - Un grafo G es conexo si y sólo si existe un vértice de G que es vecino de todos los demás vértices de G .
18. Sea G un grafo con n vértices y exactamente dos componentes conexas cada componente con m_1 y m_2 vértices ($m_1 + m_2 = n$). ¿Cuál es la cantidad máxima de aristas que puede tener G ? Justifique.
19. Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices son todas las secuencias de n bits, y tal que dos vértices x, y están conectados si y solo si x e y difieren exactamente en 2 posiciones, por ejemplo, si $n = 4$ los vértices 0011 y 1111 estarían conectados por una arista. Determine la cantidad de componentes de G .
20. Demuestre que un grafo $G = (V(G), E(G))$ es conexo si y sólo si para cada par de subconjuntos no vacíos de vértices U y W tales que $U \cup W = V(G)$ y $U \cap W = \emptyset$, existe una arista en $E(G)$ que une a un vértice de U con un vértice de W .

21. Sea G un grafo, $v \in V(G)$ un vértice cualquiera de G y $e \in E(G)$ una arista cualquiera de G . Describa las matrices de adyacencia e incidencia de $G - v$ y $G - e$ a partir de las matrices de adyacencia e incidencia de G .
22. Sea G un grafo conexo y v un vértice cualquiera de él. Demuestre que v tiene un vecino en cada una de las componentes conexas de $G - v$. Use el anterior resultado para concluir que ningún grafo tiene un vértice de corte de grado 1.
23. Sean r y s dos números enteros positivos. Sea G un grafo simple con vértices v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , tal que los vértices v_i y v_j son vecino si y sólo si $|i - j| = s$ o $|i - j| = r$. Muestre que G tiene k componentes donde k resulta de tomar el máximo común divisor entre r, s y n .
24. Recuerde que en un grafo conexo G un vértice v es de corte si el grafo $G - v$ (el grafo que resulta de G al sacar el vértice v y todas sus aristas incidentes) no es conexo.
- Encuentre un grafo con 6 vértices y exactamente tres vértices de corte.
 - Encuentre un grafo con 6 vértices que no tenga vértices de corte.
 - Demuestre que v es un vértice de corte en G si y sólo si existen vértices u y w tales que cualquier camino desde u a w pasa por v .
25. Sea v un vértice de corte en G , demuestre que $\overline{G} - v$ es conexo.
26. Para cada uno de los siguientes grafos conexos determine:
- El mínimo número de aristas que es necesario sacar para desconectar el grafo.
 - El máximo número de aristas que se pueden sacar de tal manera que el grafo siga siendo conexo.
 - El mínimo número de vértices que es necesarios sacar para desconectar el grafo o dejarlo vacío (al sacar un vértice de un grafo se sacan además todas las aristas incidentes a ese vértice).
 - El máximo número de vértices que se pueden sacar de tal manera que el grafo siga siendo conexo o quede vacío.



27. Responda la pregunta anterior para los grafos K_n y $K_{m,n}$. Responda también la pregunta anterior para H_n , el hipercubo de n dimensiones.

28. Sea G un grafo Euleriano y e una arista cualquiera de G . Demuestre que $G - e$ (el grafo que resulta de G al sacar la arista e) es conexo.
29. Sea G un grafo Euleriano y v un vértice cualquiera de G . Demuestre que $G - v$ (el grafo que resulta de G al sacar v y sus aristas incidentes) no es un grafo Euleriano.
30. Diga verdadero o falso justificando en cada caso.
- Un grafo bipartito, si es Euleriano entonces tiene una cantidad par de aristas.
 - Un grafo (simple) Euleriano con una cantidad par de vértices siempre tiene una cantidad par de aristas.
31. Determine los valores de m y n de manera tal que $K_{m,n}$ sea un grafo Euleriano
32. Muestre un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones.
- Si G es conexo entonces \overline{G} no es conexo.
 - Si G tiene un ciclo Euleriano entonces \overline{G} también tiene un ciclo Euleriano.
 - Si G tiene un ciclo Euleriano entonces \overline{G} no tiene un ciclo Euleriano.
 - Si G tiene un ciclo Euleriano entonces \overline{G} no es conexo.
33. Sea G un grafo conexo, y e una arista de G . Demuestre que si e no es parte de un ciclo en G entonces el grafo que resulta de G al quitar la arista e no es conexo.
34. Para el siguiente grafo, determine si es o no Euleriano. Si su respuesta es sí, muestre como construir el ciclo Euleriano.



35. Para cada uno de los siguientes grafos encuentre un camino Euleriano.

