P1 Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que el grado de cada vértice es mayor o igual a 2. Demostrar que G tiene al menos un ciclo.

Solución:
Sea $P = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ el camino más largo en G. Si P posee un ciclo, claramente G también lo posee, demostrando así lo pedido. Por otra parte, si P no posee un ciclo, se tiene que u_1 debe aparecer una única vez en P.

Dado que u_1 posee al menos dos vecinos, ya que $\text{grado}(u_1) \geq 2$, debe existir un $v \neq u_2$ tal que $(u_1, v) \in E$. En consecuencia, v debe pertenecer a P, pues de no hacerlo, se podría extender P a $(v, u_1, u_2, \ldots, u_n)$, el cual es estrictamente más grande que P.

Debido a esto, debe existir un $i > 2$ tal que $u_i = v$, a partir de esto podemos crear el ciclo $(u_1, u_2, \ldots, u_i, u_1)$, puesto que u_i es vecino de u_1.

P2 Un *torneo* es un grafo simple y dirigido tal que si u y v son nodos distintos del grafo, entonces exactamente uno de los pares (u, v) y (v, u) es un arco del grafo.

Demuestre que todo torneo tiene un camino Hamiltoniano; es decir, un camino simple que visita cada vértice exactamente una vez.

Solución: Por inducción en el número n de vértices. Para $n = 1$ es trivial. Asuma que G tiene $n + 1$ vértices. Remueva un vértice v cualquiera de G. Entonces $G' = G\ v$ es un torneo, y, por hipótesis inductiva tiene camino hamiltoniano desde nodo u a u' . Si (v, u) o (u', v) son arcos en G entonces existirá camino hamiltoniano en G (desde v a u' o desde u a v). Asuma, por el contrario, que (u, v) y (v, u') no son arcos en G. Entonces debe existir*nodo u'' tal que (u'', v) y (v, u''') son arcos en G, donde u''' es el nodo que viene inmediatamente después que u'' en e el camino hamiltoniano de G'. Concluimos que G tiene como camino hamiltoniano el que empieza en u, sigue el camino hamiltoniano de G' hasta u'', visita v, vuelve a u''', y luego sigue el camino hamiltoniano de G hasta u'.

***Los nodos u'' y u''' deben existir pues la única forma de que no existan es que todos los k primeros nodos w del camino hamiltoniano de G' cumplan que (v, w) es arco en G y los n-k restantes cumplan que (w, v) es arco en G. En cualquier otro caso existen los nodos u'' y u''' mencionados. No obstante, dado que (u,v) y (v, u') son arcos en G esto no se cumple por lo que necesariamente existe u'' y u'''.**

P3 *Sea G un grafo con un ciclo C tal que existen dos vertices distintos x, y en C unidos por un camino de largo al menos k en G (note que este camino no necesariamente esta contenido en C). Pruebe que entonces G tiene un ciclo, que no necesariamente es C, de largo al menos $\sqrt{k}$:*

Demostración: El objetivo es ser ordenando contando los largos de los arcos que podemos tener. Supongamos que no existe ningún ciclo de largo $\sqrt{k}$ y llegue a una contradicción (trataremos de contradecir la existencia del camino de largo k en G. Note que si P esta contenido en C entonces C es de largo al menos k y no hay nada que probar, luego asumimos P no contenido en C.

Consideremos $P \cap C = \{r_1, r_2, .., r_m\}$ los vertices de P que intersectan a C (y ordenado en el orden que aparecen llendo desde x a y). Note que $m < \sqrt{k}$, puesto que son vertices que están en C que es un ciclo. Además note que estos forman un ciclo de la forma:

$$r_i P r_{i+1} r_{i+1} C r_i$$

Donde $r_i P r_{i+1}$ son los vertices de P que estan en el camino desde r_i hasta r_{i+1} y $r_{i+1} C r_i$ son los vertices de C que estan en el camino desde r_{i+1} hasta r_i. Como lo anterior es un ciclo en G tenemos que $|r_i P r_{i+1} r_{i+1} C r_i| < \sqrt{k}$, en particular $|r_i P r_{i+1}| < \sqrt{k}$.

Veamos que aquel conteo no calza. Para ello note que el largo de P puede ser descompuesto en el largo de los trazos que lo forman, es decir, descomponer en los largos de $r_i P r_{i+1}$, luego:

$$|P| = \sum_{i=1}^{m-1} |r_i P r_{i+1}| < \sum_{i=1}^{m-1} \sqrt{k} \leq m\sqrt{k} < k$$

Luego $|P| < k$ lo que es una contradicción. Luego debe existir algún ciclo de largo al menos $\sqrt{k}$.

∎

P4

Sea un grafo simple y conexo $G(V, E)$, considerando $u, v \in V$, definiremos las siguientes funciones:

- $MaxFlow(u, v)$: Cantidad máxima de caminos que pueden ir desde u hasta v sin repetir aristas.
- $MinCut(u, v)$: Conjunto mínimo de aristas tales que, al ser sacadas del grafo, desconectan a u de v.

Demuestre que:

$$MaxFlow(u, v) = |MinCut(u, v)|$$

Solución: Lo demostraremos por contradicción, asumamos que existen casos en que $MaxFlow(u, v) \neq |MinCut(u, v)|$, es decir $MaxFlow(u, v) > |MinCut(u, v)|$ o $MaxFlow(u, v) < |MinCut(u, v)|$.

- Caso 1: $MaxFlow(u, v) > |MinCut(u, v)|$

  Una arista de corte puede cortar a lo mas un solo camino, por lo que en el mejor de los casos cada arista de corte corta un camino. Dado que $MaxFlow(u, v) > |MinCut(u, v)|$, entonces debe quedar un camino que llega desde u hasta v, por lo que u y v siguen conectados. $\rightarrow\leftarrow$

- Caso 2:$MaxFlow(u, v) < |MinCut(u, v)|$

  Cortarle una arista a un camino no asegura que deje de haber un camino entre u y v, ya que el camino puede reconstruirse por otro lado, sin embargo, para cualquier camino existe al menos una arista critica, la cual al ser cortada no permite que el camino se reconstruya, si esta arista no existiera, significaría que para este camino ninguna de sus aristas es indispensable, ya que siempre puede tomar otra ruta para suplir el corte. Pero si esto fuera cierto entonces podríamos armar un camino adicional utilizando solamente estos caminos suplementarios, lo cual es una contradicción. Debido a esto, no hay manera de que $|MinCut(u, v)|$ fuera mayor que $MaxFlow(u, v)$, ya que siempre te bastara con una sola arista de corte para cortar cada camino.