UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 2 - Semestre Otoño 2013

1. Si X es un conjunto, entonces 2^X es el conjunto potencia de X (es decir, $2^X = \{Y \mid Y \subseteq X\}$).

   Sea E un conjunto y A un subconjunto no vacío de E. Defina una relación $\mathcal{R}$ sobre 2^E, de tal forma que $(E_1, E_2) \in \mathcal{R}$ si y solo si $A \setminus E_1 = A \setminus E_2$, para todo $E_1, E_2 \in 2^E$.

   - (2pts) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en 2^E.

     Solución:

     Dado que la relación $\mathcal{R}$ está definida en función de una igualdad, resulta ser de equivalencia trivialmente. En efecto,

     Refleja: $(E_1, E_1) \in \mathcal{R}$ ✓.

     Simétrica: $(E_1, E_2) \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus E_1 = A \setminus E_2 \Rightarrow A \setminus E_2 = A \setminus E_1 \Rightarrow (E_2, E_1) \in \mathcal{R}$.

     Transitiva: Sean $(E_1, E_2), (E_2, E_3) \in \mathcal{R}$. Luego, $A \setminus E_1 = A \setminus E_2 = A \setminus E_3 \Rightarrow A \setminus E_1 = A \setminus E_3 \Rightarrow (E_1, E_3) \in \mathcal{R}$.

   - (4pts) Demuestre que el conjunto de clases de equivalencia definidas por $\mathcal{R}$ en 2^E es igual a $\{[X]_{\mathcal{R}} \mid X \subseteq A\}$.

     Solución:

     Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de clases de equivalencia definidas por $\mathcal{R}$. Se tiene que $\{[X]_{\mathcal{R}} \mid X \subseteq A\} \subseteq \mathcal{C}$. Para ver la otra inclusión, recordemos que $A = (A \cap B^c)\dot{\cup}(A \cap B) = (A \setminus B)\dot{\cup}(A \cap B)$. Luego, podemos caracterizar la relación $\mathcal{R}$ mediante

     $$(E_1, E_2) \in \mathcal{R} \; ssi \; A \cap E_1 = A \cap E_2 \qquad (1)$$

     Sea pues, $Y \subseteq E$ tal que $Y \not\subseteq A$. Basta encontrar, un conjunto $X \subseteq$ tal que $(X, Y) \in \mathcal{R}$, con lo que $[Y]_{\mathcal{R}} = [X]_{\mathcal{R}}$, y por tanto se tendrá la inclusión restante. Así, tomando $X := Y \cap A$, gracias a la caracterización (1), se tiene que $(X, Y) \in \mathcal{R}$.

2. Los principios de (i) inducción, (ii) inducción fuerte, y (iii) de buen orden, son postulados acerca de los números naturales. Demuestre que no es posible asumir uno de ellos sin tener que asumir todos los otros. Es decir, que si asumimos uno cualquiera de ellos como cierto entonces debemos asumir los otros dos como ciertos también.

   Solución:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que satisface:

a) $0 \in A$.

b) Si $k \in A, \ \forall k \leq n$, entonces $n+1 \in A$.

Luego, probar el principio de inducción fuerte corresponde a probar que $A = \mathbb{N}$.

Consideremos el conjunto

$$B := \{n \in \mathbb{N} \mid k \in A, \ \forall k \leq n\}$$

Si probamos que $B = \mathbb{N}$ podremos concluir, pues por definición $B \subseteq A$, y $0 \in B$.

Sea $n \in B$.

Por definición, $k \in A, \ \forall k \leq n \overbrace{\Rightarrow}^{(b)} n+1 \in A$. Así, $k \in A, \ \forall k \leq n+1 \Rightarrow n+1 \in B$.

Es decir, B es tal que $0 \in B$, y si $n \in B$, entonces $n+1 \in B$, luego por el principio de inducción $B = \mathbb{N}$, con lo que se concluye.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Consideremos la siguiente propiedad: $p(n)$: "Si $n \in A$, entonces A posee un mínimo elemento". Probaremos esta propiedad utilizando el principio de inducción fuerte.

Caso Base: $p(0)\checkmark$.

Si $0 \in A, \subseteq \mathbb{N}$, entonces A posee un mínimo elemento, el 0.

Paso Inductivo: Si $p(j)$ es cierto para algún $j < n$, entonces por hipótesis de inducción A posee un mínimo elemento. Luego, en particular también es cierto $p(n)$.

Por otro lado, si $\forall j < n, \ p(j)$ no es cierto, entonces, si $n \in A$, A posee un mínimo elemento, n.

Finalmente, sea $A \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto no vacío. Por tanto, existe $n \in A$. Ahora, por lo recién probado, se tiene que $p(n)$ es cierto, y en consecuencia A posee un mínimo elemento.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

a) $0 \in A$.

b) Si $n \in A$, entonces $n+1 \in A$.

Sea $B = \mathbb{N} - A$. Supongamos que $B \neq \emptyset$ (pues de ser así estamos listos). Luego, por el principio de buen orden B tiene un primer elemento, digamos m. Ahora, $m \neq 0$, pues $0 \in A$. Además, $m-1 \notin B$, pues m es el mínimo elemento de B. Por lo tanto, $m-1 \in A$, pero por la estructura de A, esto implica que $(m-1)+1 = m \in A$, con lo que se obtiene una contradicción. Luego, $B = \emptyset$, es decir, $A = \mathbb{N}$.

3. *a*) (4pts) Recuerde la definición recursiva del inverso w^{-1} de un string $w \in \Sigma^*$ vista en clases: Si $w = \epsilon$ entonces $w^{-1} = w$, y si $w = x \cdot a$, donde $x \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$, entonces $w^{-1} = a \cdot x^{-1}$. Demuestre que para cada $w \in \Sigma^*$ se tiene que $(w^{-1})^{-1} = w$. Utilice solo la definición de inverso dada arriba y la de concatenación vista en clases. Cualquier otra propiedad que utilice debe demostrarla.

Solución:

Primero probaremos la siguiente propiedad:

$$\forall x, y \in \Sigma^* \quad (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$$

En efecto, por inducción en el tamaño de $y \in \Sigma^*$. Si $|y| = 0$, es decir, $y = \varepsilon$, entonces es directo. Si $y = y'a$ con $y' \in \Sigma^*$, $|y'| = n$, y $a \in \Sigma$, entonces, suponiendo que la propiedad es cierta para $|y| \leq n$, se tiene que:

$$(xy)^{-1} = (xy'a)^{-1} = a(xy')^{-1} = a(y')^{-1}x^{-1} = (y'a)^{-1}x^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

Ahora procedemos por inducción a probar lo pedido. Notar que el caso base, $w = \varepsilon$ es igual a la parte anterior, y por tanto se tiene. Sea pues, $w \in \Sigma^*$, $w = w'a$ con $w' \in \Sigma^*$, $|w'| = n$. Luego

$$(w^{-1})^{-1} = ([w'a]^{-1})^{-1} = (a[w']^{-1})^{-1}$$

Usando la propiedad anterior se tiene

$$= ([w']^{-1})^{-1}a^{-1} = ([w']^{-1})^{-1}a$$

.

Por inducción, $([w']^{-1})^{-1} = w'$, luego

$$(w^{-1})^{-1} = w'a = w$$

.

b) (2pts) Demuestre por inducción que $n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ es divisible por 6, para todo entero positivo n.

Solución

Por inducción. Sea $S_n = n(n+1)(n+2)$. Luego $S_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, y es divisible por 6.

$$S_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3) = (n+1)(n+2)n + (n+1)(n+2)3$$

.

Por inducción, $(n+1)(n+2)n = 6k$ con $k \in \mathbb{N}$. Además, $(n+1)(n+2) = 2k'$ con $k' \in \mathbb{N}$, puesto que $(n+1)(n+2)$ es par para cualquier n. Luego

$$S_{n+1} = 6k + 2k' \cdot 3 = 6(k + k')$$

Luego S_{n+1} es divisible por 6.