UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 2 - Semestre Otoño 2016

1. Considere el conjunto B de todas las palabras sobre alfabeto $\{0,1\}$ que tienen tantos 0s como 1s. En este ejercicio demostraremos que este conjunto coincide con el conjunto S de palabras sobre alfabeto $\{0,1\}$ definido recursivamente como sigue:

   a) $\epsilon \in S$.
   b) Si $u, v \in S$ entonces las palabras $0u1$, $1u0$ y uv también están en S.

   Se pide lo siguiente:

   1) (2pts) Demuestre por inducción estructural que $S \subseteq B$.

      Solución: El caso base es ϵ, el cual pertenece a B por definición. Considere ahora que $u, v \in S$. Entonces por HI tenemos que $u, v \in B$, es decir, ambos tienen la misma cantidad de 1s que de 0s. Luego $1u0$, $0u1$, y uv pertenecen a B.

   2) Demostraremos ahora lo contrario, es decir, $B \subseteq S$. Para esto demostraremos por inducción que $P(n)$ es cierto para todo $n \geq 0$, donde $P(n)$ es la propiedad que expresa que toda palabra en B de largo n está en S.
      Note que $P(0)$ es trivialmente cierto ya que la única palabra de largo 0 es ϵ, la cual pertenece a S. Considere ahora $P(n+1)$, para $n \geq 0$, y asuma por hipótesis inductiva que $P(j)$ es cierto para todo $0 \leq j \leq n$. Sea w una palabra en B de largo $n+1$.

      2.1) (1pto) Suponga primero que w comienza y termina con letras distintas. Explique por qué $w \in S$.

         Solución: En este caso debe suceder que $w = 1u0$ o $w = 0u1$, donde $u \in B$. Pero u es de largo $n-1$, y por HI pertenece a S. Por definición de S tenemos entonces que w también está en S.

      2.2) (3pts) Suponga ahora que w comienza y termina con la misma letra. Explique por qué $w \in S$.
         Ayuda: Demuestre que $w = uv$, donde u, v son palabras no vacías en B. Para esto considere el *desbalance* de cada prefijo u de w, definido como el número de 1s menos el número de 0s en u. ¿Cuál es el desbalance del prefijo que consiste del primer símbolo de w solamente? ¿Cuál es el desbalance del prefijo que contiene todos los símbolos de w salvo el último?

         Solución: Asuma sin pérdida de generalidad que w comienza y termina con 1. Por tanto, el desbalance del prefijo que consiste del primer símbolo de w solamente es 1, y el desbalance del prefijo que contiene todos los símbolos de w salvo el último es -1. Como cada nuevo símbolo cambia el desbalance en a lo más 1, debe haber un prefijo u entre medio de estos dos cuyo desbalance es 0. Ese prefijo pertenece a B, y además debe satisfacerse que $w = uv$, donde v también está en B. Como el largo de u y v es estrictamente menor a $n+1$, se debe cumplir por HI que $u, v \in S$. Por definición de S tenemos entonces que $w = uv \in S$.

2. Cuando un corrector ortográfico encuentra un error en una palabra u utiliza una medida que le permite determinar cuáles son las palabras más “parecidas” a u. Para esto utiliza una noción de distancia entre palabras u y v que corresponde al menor número de *operaciones de edición* que son necesarias para convertir a u en v (estas operaciones se aplican simultáneamente en u). Las operaciones de edición permitidas son las siguientes: (a) insertar una letra, (b) borrar una letra, y (c) cambiar a una letra por otra. Utilizamos la notación $d(u, v)$ para referirnos a la distancia entre u y v. Por ejemplo, si u = horda y v = ondas, entonces $d(u, v) = 3$ (borramos la h, reemplazamos r por n, y agregamos s al final).

   a) (1pto) ¿Cuál es el valor de $d(u, v)$ cuando u o v corresponden a la palabra vacía?

   Solución: Si u es la palabra vacía entonces $d(u, v)$ corresponde al largo de v. De igual forma, si v es la palabra vacía entonces $d(u, v)$ corresponde al largo de u.

   b) (3pts) Asuma que ni u ni v corresponden a la palabra vacía, es decir, $u = a_1 \dots a_m$ y $v = b_1 \dots b_n$, donde $m, n > 0$ y los a_i’s y b_j’s son letras. Defina $u' = a_1 \dots a_{m-1}$ y $v' = b_1 \dots b_{n-1}$. Demuestre que:

   $$d(u, v) \;=\; \text{mín}\,\{1 + d(u', v),\; 1 + d(u, v'),\; \text{diff}(a_m, b_n) + d(u', v')\},$$

   donde $\text{diff}(a_m, b_n) = 1$ si $a_m \neq b_n$ y $\text{diff}(a_m, b_n) = 0$ en caso contrario.

   Ayuda: Represente la transformación de u a v de la siguiente forma: Si la letra a en la posición i no fue tocada, entonces ponemos el símbolo (a, a) en la posición i; si la letra a en la posición i fue reemplazada por b, entonces ponemos el símbolo (a, b) en la posición i; si la letra a en la posición i fue eliminada, entonces ponemos el símbolo $(a, \_)$ en la posición i; finalmente, si el símbolo a fue insertado en la posición j, entonces ponemos el símbolo $(\_, a)$ en la posición j. Por ejemplo, la transformación de u = horda a v = ondas arriba descrita es representada por la palabra $(\text{h}, \_)(\text{o}, \text{o})(\text{r}, \text{n})(\text{d}, \text{d})(\text{a}, \text{a})(\_, \text{s})$. Analice los diferentes casos que pueden ocurrir con respecto al símbolo que aparece en la última posición de la palabra que representa la transformación de u a v.

   Solución: Al producir v desde u tenemos tres opciones con respecto al último símbolo de la palabra que representa la transformación: Este es $(a_m, \_)$, es decir, la última letra de u fue eliminada, o $(\_, b_n)$, es decir, la última letra de v fue insertada al final de u, o (a_m, b_n), es decir, $a_m = b_n$ o a_m fue cambiado por b_n. En el primer caso $d(u, v)$ corresponde a $1 + d(u', v)$, en el segundo a $1 + d(u, v')$, y en el tercero a $\text{diff}(a_m, b_n) + d(u', v')$.

   c) (2pts) Utilizando lo anterior, diseñe un algoritmo recursivo eficiente que calcule $d(u, v)$ y encuentre una secuencia mínima de operaciones necesarias para convertir a u en v.

   Solución: Sean u_i y v_j los prefijos de largo i y j de u y v, respectivamente. (Asumimos que $u_0 = v_0 = \epsilon$). Compute recursivamente $d(u_i, v_j)$ utilizando la definición anterior y los casos bases $u_0 = \epsilon$ o $v_0 = \epsilon$ descritos en parte (a). El valor de $d(u, v)$ corresponde a $d(u_m, v_n)$, el que puede ser computado en tiempo $O(mn)$. En cada paso recurso además dejamos un bit de información que nos dice cual es la expresión que representa el mínimo, es decir, $1+d(u_{i-1}, v_j)$, $1 + d(u_i, v_{j-1})$, o $\text{diff}(a_i, b_j) + d(u_{i-1}, v_{j-1})$. Con esta información podemos encontrar en tiempo lineal la secuencia mínima de operaciones necesarias para convertir a u en v.

3. Considere una *caminata aleatoria* en $\mathbb{Z}$ que comienza en el origen 0. En cada momento, el caminante tiene una probabilidad $0 \leq p \leq 1$ de moverse una unidad a la derecha y $1 - p$ de moverse una unidad a la izquierda.

a) (3pts) Encuentre una expresión para la probabilidad $P(x, n)$ de que el caminante se encuentre en el punto x, con $x \geq 0$, luego de n pasos.

Solución: Para estar en la posición x el caminante tiene que haberse movido $n_{\rightarrow}$ hacia la derecha y $n_{\rightarrow} - x$ pasos hacia la izquierda. Esto implica que $n_{\rightarrow} = n + x/2$. La probabilidad de que esto ocurra es por tanto $\binom{n}{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} (1-p)^{\frac{n-x}{2}}$.

b) (2pts) Utilice la *aproximación de Stirling* $y! \approx y^{y+\frac{1}{2}} e^{-y} \sqrt{2\pi}$ para demostrar que:

$$P(0, 2m) \approx (4p(1-p))^m / \sqrt{m\pi}.$$

Solución: Tenemos que

$$P(0, 2m) \approx \frac{(2m)^{2m+\frac{1}{2}} e^{-2m} \sqrt{2\pi}}{m^{2m+1} e^{-2m} 2\pi} p^m (1-p)^m \approx \frac{(4p(1-p))^m}{\sqrt{m\pi}}.$$

c) (1pto) ¿Qué sucede con $P(0, 2m)$ cuando $m \to \infty$? (Piense cuál es el máximo valor que puede tomar $p(1-p)$).

Solución: Note que $p(1-p) \leq 1/4$, y por tanto $P(0, 2m) \to 0$ cuando $m \to \infty$.