UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 2 - Semestre Primavera 2009

1. Demuestre utilizando inducción fuerte que la siguiente propiedad es cierta para cada entero positivo n: $\sqrt{2} \neq n/b$ para todo entero positivo b.

   Solución: El caso base es trivial pues $1/b \leq 1$ para todo entero psoitivo b, mientras que $\sqrt{2} > 1$. A continuación probamos el caso inductivo.

   Asuma por contradicción que $n + 1/b = \sqrt{2}$, para algún $b > 0$. Entonces $(n+1)^2/b^2 = 2$. Usando técnicas vistas en clases concluimos que tanto $(n+1)$ como b tienen que ser pares. Suponga que $(n+1) = 2a$ y $b = 2c$, para enteros positivos a y c. Esto quiere decir que $a/c = \sqrt{2}$, lo que contradice la hipótesis inductiva fuerte pues $a < n + 1$.

2. El conjunto B de los strings de paréntesis *balanceados* se define recursivamente como sigue: (1) El string vacío ϵ está en B; y (2) si $x, y \in B$ entonces (x) y xy pertenecen a B.

   Definimos la función N en el conjunto de strings de paréntesis de la siguiente forma:

   $$N(\epsilon) = 0 \ ; \ N(() = 1 \ ; \ N()) = -1$$
   $$N(uv) = N(u) + N(v)$$

   a) Demuestre usando inducción estructural que si un string de paréntesis w es balanceado, entonces $N(w) = 0$ y $N(u) \geq 0$ para todo *prefijo* u de w, i.e. para todo u tal que $w = uu'$.

   b) Demuestre usando inducción estructural que si un string de paréntesis w satisface que $N(w) = 0$ y $N(u) \geq 0$ para todo *prefijo* u de w, entonces w es balanceado.

   Solución: Demostramos ambas partes por separado.

   a) El caso base $w = \epsilon$ es trivial. A continuación probamos el caso inductivo.

   Suponga en primer lugar que $w = (w')$, donde w' es un string balanceado. Por definición, $N(w) = N(() + N(w')) = N(() + N(w') + N())$. Por hipótesis inductiva, $N(w') = 0$. Por tanto, $N(w) = N(() + N()) = 0$. Asuma ahora que u es un prefijo de w. Si $u = w$ entonces $N(u) = N(w) = 0$ y no hay nada que probar. Asuma entonces que $u = (w''$, donde w'' es un prefijo de w'. Por hipótesis inductiva, $N(w'') \geq 0$, y, por tanto, $N(u) = N(() + N(w'') \geq 0$.

   El otro caso, que $w = w_1 w_2$, donde w_1 y w_2 son balanceados puede ser resuelto de forma similar.

   b) Esta vez debemos hacer inducción en el conjunto de *todos* los strings de paréntesis que se define recursivamente de la siguiente forma: (1) El string vacío ϵ es un string, y (2) si w es un string entonces $w)$ y $w($ son strings.

El caso inductivo $w = \epsilon$ es trivial, pues por definición es balanceado. A continuación probamos el caso inductivo.

Asuma primero que $w = w'($. Suponga, sin pérdida de generalidad, que $N(w) = 0$. Luego, $N(w') = -1$. Por tanto, la propiedad se cumple trivialmente.

Asuma, por tanto, que $w = w')$, que $N(w) = 0$ y que $N(u) \geq 0$ para todo prefijo u de w. Consideramos dos casos. Primero, asuma que existen strings no vacíos u y v tal que $w = uv$ y $N(u) = 0$. Luego, $N(v) = 0$. Además, es fácil demostrar que todo prefijo de u' de u satisface $N(u') \geq 0$. Lo mismo es cierto para todo prefijo v' de v. Por hipótesis inductiva, u y v son balanceados, por lo que w es balanceado.

El segundo caso es que no existan strings no vacíos u y v tal que $w = uv$ y $N(u) = 0$. Podemos concluir que el primer símbolo de w es $($, y que, por tanto, $w' = (w''$. Además, $N(w'') = 0$, y dado que todo prefijo no vacío z de w' satisface $N(z) > 0$ concluimos qe todo prefijo z' de w'' satisface $N(z') \geq 0$. Luego, por hipótesis inductiva, w'' es balanceado, y dado que $w = (w'')$, concluimos que w también es balanceado.

3. Tome 11 enteros distintos $\{a_1, \ldots, a_{11}\}$ entre 1 y 100. Demuestre que existen dos subconjuntos A y B de $\{a_1, \ldots, a_{11}\}$ tales que (1) A y B son no vacíos, (2) $A \cap B = \emptyset$, y (3) $\sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b$.

   Solución: Existen $2^{11} - 1 = 2047$ subconjuntos distintos no vacíos de $M = \{a_1, \ldots, a_{11}\}$. Como para cada $C \subseteq M$ se tiene que $\sum_{c \in C} c \leq 1100$, deben existir dos subconjuntos no vacíos C_1 y C_2 de M tal que $C_1 \neq C_2$ y $\sum_{c_1 \in C_1} c_1 = \sum_{c_2 \in C_2} c_2$. El problema es que $C_1 \cap C_2$ podría no ser vacío. Claramente (*) $C_1 \not\subseteq C_2$ y $C_2 \not\subseteq C_1$. Defina $A = C_1 \setminus (C_1 \cap C_2)$ y $B = C_2 \setminus (C_1 \cap C_2)$. Concluimos que $A \cap B = \emptyset$, $A, B \neq \emptyset$ (por (*)), y $\sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b$.