UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 2 - Semestre Primavera 2013

1. *a*) Conjeture una fórmula que determine

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \qquad (n \geq 1).$$

Demuestre por inducción que esta fórmula es correcta.

b) Sea $f : \mathbb{N}^{+} \times \mathbb{N}^{+} \to \mathbb{N}^{+}$ una función tal que $f(1,1) = 2$ y para todo $m, n \geq 1$ se tiene que

$$\begin{cases} f(m+1,n) &= f(m,n) + 2(m+n) \\ f(m,n+1) &= f(m,n) + 2(m+n-1) \end{cases}$$

Demuestre por inducción que $f(m,n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2$, para todo $m, n \geq 1$.

Solución: (a) Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, para $n \geq 1$. Probando con valores pequeños de n podemos conjeturar que $S_n = \frac{n}{n+1}$. De hecho, $S_1 = \frac{1}{2}$, y por tanto el caso base es cierto. Además, por hipótesis inductiva $S_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, lo que equivale a $\frac{n+1}{n+2}$.

(b) Sea $P(m,n)$ la propiedad que $f(m,n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2$, para $m, n \geq 1$. Nos basta demostrar lo sigguiente: (i) $P(1,1)$ es cierto, (2) para todo $m \geq 1$ se tiene que si $P(m,1)$ es cierto entonces $P(m+1,1)$ es cierto, y (iii) para todo $m, n \geq 1$ se cumple que si $P(m,n)$ es cierto entonces $P(m,n+1)$ es cierto.

Claramente, (i) es cierto. Asuma que $P(m,1)$ es cierto. Por definición, $f(m+1,1) = f(m,1) + 2m + 2$. Además, por HI se tiene que $f(m,1) = (m+1)^2 - (m+1) = m^2 + m$. Luego, $f(m+1) = m^2 + 3m + 2 = ((m+1)+1)^2 - ((m+1)+1)$. Concluímos que $P(m+1,1)$ es cierto.

Asuma finalmente que $P(m,n)$ es cierto. Por definición, $f(m,n+1) = f(m,n) + 2m + 2n - 2$. Por HI se tiene que $f(m,n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2$. Luego, $f(m,n+1) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2 + 2m + 2n - 2$, que es igual a $(m+(n+1))^2 - (m+(n+1)) - 2(n+1) + 2$. Concluímos que $P(m,n+1)$ es cierto.

2. *a*) Sea R una relación binaria en un conjunto A. La *relación de equivalencia generada por* R *en* A es la "menor" relación S en A que es de equivalencia y contiene a R. En otras palabras, para todo S' en A que contiene a R y es de equivalencia se tiene que $S \subseteq S'$.

Demuestre que para todo $a, b \in A$ se tiene que $(a,b) \in S$ si y solo si existen elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$ tal que $a_1 = a$, $a_n = b$, y $(a_i, a_{i+1}) \in R \cup R^{-}$, para todo $1 \leq i < n$.

b) Sea $T : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ una función definida como sigue:

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n, & \text{para } n > 1 \end{cases}$$

Demuestre utilizando inducción fuerte que $T(n)$ es $O(n \log n)$.

Solución: (a) Sea S'_m el conjunto que contiene todos los pares $(a, b) \in A \times A$ tales que existen elementos $a_1, \ldots, a_m \in A$ que cumplen que $a_1 = a$, $a_n = b$, y $(a_i, a_{i+1}) \in R \cup R^-$, para todo $1 \leq i < m$. Definimos $S' = \bigcup_{m \geq 1} S'_m$. Demostraremos que $S' = S$.

Primero, es posible demostrar que S' contiene a R y es relación de equivalencia (pues es refleja, simétrica y transitiva). Luego, por definición $S \subseteq S'$. Por otro lado, podemos demostrar por inducción en m que $S'_m \subseteq S$. Los casos base son $m = 1$ y $m = 2$. Claramente, S'_1 contiene a todos los pares $(a, a) \in R$, los que pertenecen a S pues S es refleja. Además, $S'_2 = R \cup R^-$, y por tanto $S'_2 \subseteq S$, pues S contiene a R y es simétrica. El caso inductivo, $n+1$, para $n \geq 2$, contiene a los pares $(a, b) \in A \times A$ tales que existe $c \in A$ que satisface $(a, c) \in S'_n$ y $(c, b) \in S'_2$. Por HI ambos (a, c) y (c, b) están en S, por lo que $(a, b) \in S$ pues S es relación transitiva.

(b) Demostramos que $T(n) \leq 4n \log n$, para todo $n \geq 2$ (note que para $n = 1$ esto no es cierto). Consideramos casos bases $n = 2, 3$, ambos cuales se cumplen. Considere ahora el caso $n > 3$. Por HI podemos asumir que $T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \leq 4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Luego, $T(n) \leq 2 \cdot (4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n$. Por tanto, $T(n) \leq 4n \log (\frac{n}{2}) + n = 4n(\log n - 1) + n \leq 4n \log n$.

3. Sea $p \geq 2$ primo. Asuma que $\sqrt{p}$ es racional, es decir que $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$, para $a, b \in \mathbb{N}^+$.

   a) (4pts) Demuestre que existen $a', b' \in \mathbb{N}^+$ tales que $b' < b$ y $\sqrt{p} = \frac{a'}{b'}$.

   b) (2pts) Utilizando lo anterior y el principio del buen orden concluya que $\sqrt{p}$ no es racional.

Solución: (a) Se tiene que $a^2 = pb^2$. Luego, a^2 es divisible por p, y como p es primo se tiene que a es divisible por p. Asuma $a = cp$. Luego $c^2p^2 = pb^2$, y por tanto, $c^2p = b^2$. Podemos concluir entonces que b es divisible por p. Sea $b' = \frac{b}{p}$. Luego $b' < b$ y $\sqrt{p} = \frac{a'}{b'}$.

(b) Sabemos que $A = \{n \in \mathbb{N}^+ \mid \text{existe } m \in \mathbb{N}^+ \text{ tal que } \sqrt{p} = \frac{m}{n}\}$ es no vacío. Por principio del buen orden A tiene menor elemento c. Pero por parte (b) existe $c' < c$ en conjunto A, lo que es una contradicción.