UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 2 - Semestre Otoño 2011

1. Sea Σ un conjunto finito de símbolos. Definimos inductivamente el conjunto $L(\Sigma)$ como sigue:

   a) Si $a \in \Sigma$ entonces $a \in L(\Sigma)$.

   b) Si $\phi, \psi \in L(\Sigma)$ entonces $(\phi \star \psi) \in L(\Sigma)$.

   Se le pide lo siguiente

   - (1pto) Defina inductivamente la función $\mathsf{largo} : L(\Sigma) \to \mathbb{N}$ tal que para cada $\phi \in L(\Sigma)$ se tiene que $\mathsf{largo}(\phi)$ es el largo de ϕ visto como una secuencia de símbolos. Por ejemplo, $\mathsf{largo}(a) = 1$, si $a \in \Sigma$, y $\mathsf{largo}((a \star b)) = 5$, si $a, b \in \Sigma$.
   - (1pto) Defina inductivamente la función $v : L(\Sigma) \to \mathbb{N}$ tal que para cada $\phi \in L(\Sigma)$ se tiene que $v(\phi)$ es la cantidad de símbolos de ϕ que pertenecen a Σ. Por ejemplo, $v(a) = 1$ y $v((a \star a)) = 2$, si $a \in \Sigma$.
   - (4ptos) Demuestre inductivamente que para cada $\phi \in L(\Sigma)$ se tiene que $\mathsf{largo}(\phi) \leq 3v(\phi)^2$.

   Solución: La función $\mathsf{largo} : L(\Sigma) \to \mathbb{N}$ se define como $\mathsf{largo}(a) = 1$, si $a \in \Sigma$, y $\mathsf{largo}((\phi \star \psi)) = 3 + \mathsf{largo}(\phi) + \mathsf{largo}(\psi)$, si $\phi, \psi \in L(\Sigma)$. La función $v : L(\Sigma) \to \mathbb{N}$ se define como $v(a) = 1$, si $a \in \Sigma$, y $v((\phi \star \psi)) = v(\phi) + v(\psi)$, si $\phi, \psi \in \Sigma$.

   Claramente $\mathsf{largo}(a) = 1 \leq 3v(a)^2$. Considere secuencia de símbolos ϕ de la forma $(\alpha \star \beta)$. Entonces $\mathsf{largo}(\phi) = 3 + \mathsf{largo}(\alpha) + \mathsf{largo}(\beta)$. Pero lo anterior por hipótesis inductiva es menor o igual a $3 + 3v(\alpha)^2 + 3v(\beta)^2$. Por tanto, $\mathsf{largo}(\phi) \leq 3(v(\alpha)^2 + v(\beta)^2 + 1) \leq 3(v(\alpha) + v(\beta))^2$. Lo último es cierto ya que $v(\alpha), v(\beta) > 0$. Concluimos que $\mathsf{largo}(\phi) \leq 3v(\phi)^2$, pues $v(\phi) = v(\alpha) + v(\beta)$.

2. Sea n un entero y considere un tablero de $2^n \times 2^n$ casilleros. Demuestre usando inducción que si al tablero se le saca un casillero entonces puede ser *embaldosado* por *triominos*, donde:

   - Un *triomino* es una figura en forma de L que cubre 3 unidades cuadradas.
   - Un conjunto de triominos *embaldosa* un tablero si cada casillero se halla cubiero por algun triomino, los triominos no se superponen y ningún triomino queda colgando fuera del tablero.

   Solución: Ejemplo 13, Capítulo 4.1 del libro.

3. Demuestre usando inducción que si $I_1, I_2, \ldots, I_n$ es una colección de intervalos abiertos sobre los números reales, $n \geq 2$, y para cada $1 \leq i, j \leq n$ se tiene que $I_i \cap I_j \neq \emptyset$, entonces $I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n \neq \emptyset$. (Recuerde que un intervalo abierto de números reales es un conjunto de números reales x tal que $a < x < b$, donde a y b son números reales con $a < b$).

Solución: El caso base $n = 2$ es trivial. Asuma entonces que para una colección $I_1, I_2, \dots, I_{n+1}$ de intervalos abiertos en los reales se tiene que $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ ($1 \leq i, j \leq n+1$). No es difícil demostrar entonces que si $J_i := I_i \cap I_{n+1}$, $1 \leq i \leq n$, entonces $J_1, J_2, \dots, J_n$ satisface que para cada $1 \leq i, j \leq n$ se tiene que $J_i \cap J_j \neq \emptyset$. Esto implica, por hipótesis inductiva, que existe real $c \in J_1 \cap \cdots \cap J_n$. Por definición $c \in I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_{n+1}$. Esto demuestra que $I_1 \cap \cdots \cap I_{n+1} \neq \emptyset$.