UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 2

1. (1,5 puntos) Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

   a) Defina una relación binaria $\preceq_O$ en $\mathcal{F}$ tal que para cada $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, $f_1 \preceq_O f_2$ si y sólo si f_1 es $O(f_2)$. ¿Es $\preceq_O$ un orden parcial en $\mathcal{F}$?

   Solución: No, porque no es una relación antisimétrica. Ejemplo, $f_1 = x$ y $f_2 = x + 1$. Claramente, f_1 es $O(f_2)$ y viceversa, pero $f_1 \neq f_2$.

   b) Defina una relación binaria $\preceq_\Theta$ en $\mathcal{F}$ tal que para cada $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, $f_1 \preceq_\Theta f_2$ si y sólo si f_1 es $\Theta(f_2)$. Demuestre que $\preceq_\Theta$ una relación de equivalencia en $\mathcal{F}$.

   Solución: Fácil.

   c) Defina $\mathcal{F}_\Theta$ como el conjunto de las clases de equivalencia de $\mathcal{F}$ con respecto a la relación de equivalencia Θ. Defina la relación $\preceq_{O,\Theta}$ en $\mathcal{F}_\Theta$ de la siguiente forma: Para todo $[f_1], [f_2] \in \mathcal{F}_\Theta$, $[f_1] \preceq_{O,\Theta} [f_2]$ si y sólo si existe $f \in [f_1]$ y $f' \in [f_2]$ tal que f es $O(f')$. Demuestre que $\preceq_{O,\Theta}$ es un orden parcial en $\mathcal{F}_\Theta$.

   Solución: Claramente la relación es refleja porque f es $O(f)$.
   Para la antisimetría, asuma $[f_1] \preceq_{O,\Theta} [f_2]$ y $[f_2] \preceq_{O,\Theta} [f_1]$. Luego, existe $g_1, g_2 \in [f_1]$ y $g_3, g_4 \in [f_2]$ tales que g_1 es $O(g_3)$ y g_4 es $O(g_2)$. Pero esto implica que f_1 es $O(f_2)$ y f_2 es $O(f_1)$, pues g_1 y g_2 son $\Theta(f_1)$ y g_3 y g_4 son $\Theta(f_2)$. Concluimos que f_1 es $\Theta(f_2)$, y por tanto $[f_1] = [f_2]$.
   La transitividad es similar.

   d) Demuestre que $\preceq_{O,\Theta}$ no es un orden total en $\mathcal{F}_\Theta$.

   Solución: Esto lo demuestra las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

2. (1,5 puntos) Demuestre usando inducción que todo conjunto no vacío de enteros positivos tiene un menor elemento.

   Solución: Demostraremos por inducción que para cada $j \in \mathbb{N}$ si un conjunto contiene a j entonces tiene un menor elemento.

   Para el caso base asuma que un conjunto contiene al 0. Entonces su menor elemento es el 0.

   Para el caso inductivo, sea $j + 1 \in \mathbb{N}$. Asuma un conjunto que contiene a $j + 1$. Si el conjunto contiene a algún $k \leq j$ se tiene por HI que tiene un menor elemento. En caso contrario el $j + 1$ tiene que ser su menor elemento.

3. (1,5 puntos) Demuestre que para todo entero positivo n,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$$

Solución: Ejercicio 40 del Cap. 4.1 del libro.

4. (1,5 puntos)

   a) Defina recursivamente la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de enteros positivos, de tal forma que para cada $n \geq 0$, a_n corresponde al número de strings de largo n (sobre alfabeto $\{0,1\}$) que no tienen dos 0s consecutivos.

   (*Hint:* Considere por separado los casos en que el último símbolo de un string es 0 y 1).

   Solución: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, con $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.

   b) Demuestre que para todo $n > 0$,

$$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{2n-1} + a_{2n} = a_{2n-1} - 1.$$

   Solución: Esta estaba mala, pero básicamente es porque es Fibonacci.