CC3101 — Matemáticas Discretas para Computación

Bosquejos de Soluciones Control 2

16 de noviembre de 2016

Dispone de 2 horas para resolver el control.
Responda cada pregunta en una hoja separada y ponga su nombre en cada hoja de respuesta.
Todas las preguntas tienen el mismo puntaje.

1. Un string infinito de 0's y 1's se puede representar como una estructura $\langle \mathbb{N}, <, C, U \rangle$ en donde los elementos de $\mathbb{N}$ representan las posiciones en el string, $<$ es la típica relación de "menor estricto" en $\mathbb{N}$, y $C(\cdot)$ y $U(\cdot)$ son relaciones unarias que representan cuándo una posición es 0 o 1, respectivamente. Por ejemplo, para el string $1110000000000\cdots$ se tiene que $U(x)$ es cierta siempre que x es evaluado como 0, 1 o 2, y $C(x)$ es cierta siempre que x es evaluado como un natural mayor o igual a 3. Construya fórmulas en lógica de primer orden que expresen cada una de las siguientes propiedades.

   a) El string infinito tiene a 01 como substring (es decir, en algún momento aparece 01).

   b) El string infinito tiene una cantidad infinita de 0's e infinita de 1's.

   c) El string infinito es exactamente el string $10101010101010\cdots$.

   En cada caso justifique claramente por qué sus fórmulas están correctas.

   Solución:

   a) Basta con pedir que hayan dos posiciones, una anterior que la otra, tal que la primera tenga un 0 y la segunda un 1. La fórmula queda como

   $$\exists x \exists y (x < y \wedge C(x) \wedge U(y)).$$

   b) La forma de decir que el string tiene una cantidad infinita de 0's es asegurando que sin importar la posición que uno mire del string, siempre habrá una posterior que tiene un 0. Esto se puede asegurar con la fórmula

   $$\forall x \exists y (x < y \wedge C(y))$$

   Otra forma de decir lo mismo es decir que NO tiene una cantidad finita de 0's. Para que tenga una cantidad finita de 0's, necesariamente tiene existir un punto desde donde todas las posiciones no son 0 (o equivalente, son 1). Luego para decir que no tiene una cantidad finita de 0's se puede usar la fórmula

   $$\neg \exists x \forall y (x < y \rightarrow \neg C(y))$$

   Cualquiera de los dos tipos de fórmulas sirven. Usaremos el primer tipo. Entonces la fórmula completa pedida que dice que hay una cantidad finita de 0's y finita de 1's es

   $$\forall x \exists y (x < y \wedge C(y)) \wedge \forall x \exists y (x < y \wedge U(y))$$

   c) En este caso, lo más fácil era definir dos fórmulas auxiliares: "primero(x)" y "sigiente(x, y)". La primera de estas fórmulas dice que x es el primer posible índice y se puede definir así

   $$\text{primero}(x) \ = \ \neg \exists z (z < x)$$

es decir que no hay un elemento menor que x. La segunda dice que y es la posición siguiente a x. Esta fórmula se puede definir como

$$\text{sig}(x, y) \;=\; (x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y))$$

es decir que x es menor que y y no existe ningún elemento entre medio de ambos. Con estas fórmulas es simple definir al string pedido. Basta con asegurar que el primer elemento sea un 1 y que si una posición es 1 entonces la siguiente sea 0 y vice versa. La siguiente fórmula hace el trabajo

$$\forall x \forall y \Big((\text{primero}(x) \to U(x)) \;\wedge\; ((C(x) \wedge \text{sig}(x, y)) \to U(y)) \;\wedge\; ((U(x) \wedge \text{sig}(x, y)) \to C(y)) \Big)$$

2. Considere los strings infinitos de 0's y 1's como los descritos en la pregunta anterior.

   a) ¿Cuántos strings infinitos de 0's y 1's hay? Justifique claramente su respuesta.

   b) ¿Cuántos conjuntos de strings infinitos de 0's y 1's hay? Justifique claramente su respuesta.

   Note que cada fórmula φ en lógica de primer orden (sobre las estructuras de la pregunta anterior) define un conjunto de strings (infinitos); el conjunto de todos los strings que satisfacen φ. Por ejemplo, la respuesta a la pregunta $(1.a)$ es una fórmula que define al conjunto de todos los strings infinitos que contienen a 01 como substring.

   c) Use sus respuestas anteriores para demostrar que existe al menos un conjunto de strings infinitos que no puede ser representado usando una fórmula de la lógica de primer orden. Puede usar el hecho de que existe sólo una cantidad enumerable de fórmulas de lógica de primer orden.

   Bosquejo Solución:

   a) Hay una cantidad no enumerable de strings infinitos de 0's y 1's, se puede hacer un argumento de diagonalización exactamente como el que se hizo en clases para el conjunto $2^{\mathbb{N}}$. De hecho, no es difícil argumentar que el conjunto de los strings infinitos tiene exactamente la misma cardinalidad que $2^{\mathbb{N}}$ (se puede establecer una biyección entre ambos).

   b) El conjunto pedido es el conjunto potencia del anterior por lo que también es no enumerable, de hecho tiene la misma cardinalidad que el conjunto potencia de $2^{\mathbb{N}}$.

   c) El argumento más simple es por contradicción. Supongamos que para cada conjunto de strings infinito hay una fórmula que lo define. Esto quiere decir que existiría una función sobreyectiva desde las fórmulas a los conjuntos de strings infinitos. Pero el conjunto de fórmulas es enumerable y el conjunto de los conjuntos de strings infinitos no lo es, por lo que esa función sobreyectiva no puede existir.

3. Sean A y B dos conjuntos finitos.

   a) Use la regla de la suma y biyecciones entre conjuntos para demostrar que $|A \times B| = |A||B|$.

   b) Se define A^B como el conjunto de todas las funciones (totales) $f : B \to A$. Demuestre que $|A^B| = |A|^{|B|}$.

   Bosquejo Solución:

   a) Hecho en clases. La idea era muy simple. Supongamos que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y por lo tanto $|A| = n$. Luego podemos escribir $A \times B$ como $(\{a_1\} \times B) \cup (\{a_2\} \times B) \cup \cdots \cup (\{a_n\} \times B)$. Es fácil argumentar que $|\{a_i\} \times B| = |B|$ para todo i (haciendo una biyección entre ambos conjuntos), y que $(\{a_i\} \times B)$ y $(\{a_j\} \times B)$ son disjuntos si $a_i \neq a_j$. Luego por la regla de la suma se tiene que $|A \times B| = |B| + |B| + \cdots + |B|$ donde se suma $|B|$ n veces, por lo que $|A \times B| = n|B| = |A||B|$.

b) Estableceremos una biyección entre A^B y el producto cartesiano de A consigo mismo $|B|$ veces. Suponga que $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ y considere una función f cualquiera de B en A. Note que esta función queda totalmente definida por los valores que asigna a cada elemento de B, es decir, queda totalmente definida por los valores $(f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_m))$. Note que esta es una tupla de elementos de A, luego, a cada función le corresponde una única tupla en $A \times A \times \cdots \times A$ (m veces el producto de A). De la misma forma, a cada tupla en $A \times A \times \cdots \times A$ le corresponde una única función, lo que implica que $|A^B| = |A \times A \times \cdots (m \text{ veces}) \cdots \times A|$ y aplicando la regla del producto obtenemos que $|A^B| = |A|^m = |A|^{|B|}$.