UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 2 - Semestre Otoño 2010

1. (2pts) Sean a, b números reales tales que $0 < b < a$. Demuestre por inducción que si n es un entero positivo, entonces
$$a^n - b^n \ \leq \ na^{n-1}(a-b).$$

   Solución: El caso base es $n = 1$. Trivial.

   El lado derecho de la inigualdad para $n+1$ es $(n+1)a^n(a-b)$, lo que equivale a $na^n(a-b)+a^n(a-b)$. Por hipótesis inductiva,
$$na^n(a-b) + a^n(a-b) \ \geq \ a(a^n - b^n) + a^n(a-b) = a^{n+1} - ab^n + a^{n+1} - ba^n.$$

   Pretendemos demostrar que esta última expresión es mayor o igual a $a^{n+1} - b^{n+1}$. Note que esto ocurre si y solo si
$$a^{n+1} - ab^n - ba^n + b^{n+1} \ \geq \ 0.$$

   Pero la expresión en el lado izquierdo puede ser escrita como $(a-b)(a^n - b^n)$. Tanto $(a-b)$ como $(a^n - b^n)$ son mayores que 0, por lo que la desigualdad se cumple.

2. (2pts) Demuestre por inducción que
$$\sum_{j=1}^{n} j(j+1)(j+2)\cdots(j+k-1) \ = \ \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k+1},$$

   para todo entero positivo k y n.

   Solución: Demostraremos por inducción en n que la igualdad se cumple para todo $k \geq 1$. El caso base $n = 1$ es trivial.

   El lado izquierdo de la igualdad para $n+1$ puede escribirse como
$$\sum_{j=1}^{n} j(j+1)(j+2)\cdots(j+k-1) + (n+1)(n+2)\cdots(n+k).$$

   Por hipótesis inductiva esto es igual a
$$\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k+1} + (n+1)(n+2)\cdots(n+k).$$

   Pero esto último es a su vez equivalente a
$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(n+k+1)}{k+1},$$

   que es lo que queríamos demostrar.

3. (2pts) Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial (i.e. $\preceq$ es una relación refleja, antisimétrica y transitiva). Decimos que el elemento $a \in A$ es una *cota inferior* para $B \subseteq A$, si para todo $b \in B$ se tiene que $a \preceq b$. Además, a es un *ínfimo* para B, si es una cota inferior para B y para toda cota inferior $a' \in A$ para B se tiene que $a' \preceq a$.

   Asuma que $(A, \preceq)$ es un orden parcial que satisface lo siguiente:

   - $(A, \preceq)$ es *inferiormente completo*; esto quiere decir que todo subconjunto no vacío B de A, que tiene una cota inferior en A, también tiene un ínfimo en A;
   - $(A, \preceq)$ tiene un *máximo*; esto es, existe elemento $a \in A$ tal que para todo elemento $a' \in A$ se tiene que $a' \preceq a$; y
   - $(A, \preceq)$ tiene un *mínimo*; esto es, existe elemento $a \in A$ tal que para todo elemento $a' \in A$ se tiene que $a \preceq a'$.

   Sea $f : A \to A$ una función *monótona*; esto es, f satisface que $f(a) \preceq f(b)$ cada vez que $a \preceq b$ ($a, b \in A$).

   Demuestre lo siguiente (todos los items valen lo mismo):

   a) El conjunto $B = \{a \in A \mid f(a) \preceq a\}$ tiene ínfimo.

   Solución: Claramente B tiene cota inferior (el mínimo de A, por ejemplo). Dado que $(A, \preceq)$ es inferiormente completo, concluimos que B tiene un ínfimo b^*.

   b) Sea b^* el ínfimo de B. Demuestre que $f(b^*)$ es una cota inferior para B.

   Solución: Dado que $b^* \preceq b$, para todo $b \in B$, tenemos (por monotonía de f) que $f(b^*) \preceq f(b)$, y, por tanto que $f(b^*) \preceq b$, para todo $b \in B$ (por definición de B).

   c) Demuestre que $f(b^*)$ está en B.

   Solución: Basta demostrar que $f(b^*) \preceq b^*$. Pero esto se sigue de que $f(b^*)$ es cota inferior para b^*, pero b^* es el ínfimo de B.

   d) Demuestre finalmente que $b^* = f(b^*)$.

   Solución: Por antisimetría basta demostrar que $b^* \preceq f(b^*)$. Esto se sigue directamente de que b^* es ínfimo para B y $f(b^*)$ está en B.