CC3101 — Matemáticas Discretas para Computación

Control 2

14 de diciembre de 2011

Dispone de 1 hora y 50 minutos para resolver el control.
Responda cada pregunta en una hoja separada y ponga su nombre en cada hoja de respuesta.
Todas las preguntas tienen el mismo puntaje.

1. Una relación binaria R sobre A se dice *Euclideana* si cada vez que aRb y aRc, entonces se tiene que bRc. Las siguientes preguntas tienen que ver con relaciones Euclideanas.

   a) Sea R una relación refleja y simétrica. Demuestre que R es Euclideana si y solo si es transitiva.

   b) Demuestre que una relación R es relación de equivalencia si y sólo si R es Euclideana y refleja.

2. Sea P un conjunto de variables proposicionales. Definimos la relación binaria $\lhd$ sobre $L(P) \cup \{\Box\}$ de manera que $\psi \lhd \varphi$ si y sólo si (en cada caso $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$):

   - ψ se obtiene desde φ reemplazando una subfórmula $(\alpha \star \beta)$ por α, o
   - ψ se obtiene desde φ reemplazando una subfórmula $(\alpha \star \beta)$ por β, o
   - ψ se obtiene desde φ reemplazando una subfórmula $(\neg\alpha)$ por α, o
   - $\varphi = p$ con p una variable proposicional en P y $\psi = \Box$.

   Por ejemplo, note que
   $$((p \vee s) \wedge (q \rightarrow s)) \lhd ((p \vee s) \wedge ((q \rightarrow s) \vee (\neg r)))$$
   ya que si en la fórmula $((p \vee s) \wedge ((q \rightarrow s) \vee (\neg r)))$ reemplazamos la subfórmula $((q \rightarrow s) \vee (\neg r))$ por $(q \rightarrow s)$, obtenemos $((p \vee s) \wedge (q \rightarrow s))$. Además note que para todo $p \in P$ se tiene que $\Box \lhd p$. Por otro lado, note que $(p \wedge q) \not\lhd ((p \vee r) \wedge (q \rightarrow s))$, ya que $(p \wedge q)$ no se puede obtener desde $((p \vee r) \wedge (q \rightarrow s))$ haciendo uno de los reemplazos descritos arriba.

   Sea $\unlhd^*$ la clausura refleja y transitiva de $\lhd$. Se puede demostrar (no debe hacerlo usted) que $\unlhd^*$ es una relación de orden parcial sobre $L(P) \cup \{\Box\}$.

   a) Considere el conjunto de fórmulas:
   $$F = \{(p \wedge (\neg r)),\ ((\neg p) \wedge (r \vee s)),\ (p \wedge (q \wedge r))\}.$$
   ¿Tiene F un ínfimo en el orden parcial $(\unlhd^\star, L(P) \cup \{\Box\})$? ¿Tiene F un supremo en el orden parcial $(\unlhd^\star, L(P) \cup \{\Box\})$? Encuentre el ínfimo y supremo si es que existen y justifique claramente sus respuestas.

   b) Sea $F = \{\psi \in L(P) \cup \{\Box\} \mid \psi \unlhd^* (p \wedge (q \rightarrow (\neg r)))\}$. Dibuje el diagrama de Hasse del orden parcial $(\unlhd^*, F)$.

3. Sea A un subconjunto no vació de $\mathbb{N}$, y sea $\leq$ el orden usual de $\mathbb{N}$. Una función $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ se dice *monótona* si para todo $i \leq j$ se tiene que $f(i) \leq f(j)$.

   a) Sea $\mathcal{F}_{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f$ es una función monótona$\}$. Demuestre que $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ es un conjunto no enumerable.

   b) Sea $\mathcal{F}_{\{0,1\}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \mid f$ es una función monótona$\}$. Demuestre que $\mathcal{F}_{\{0,1\}}$ es un conjunto enumerable.