UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 2 - Semestre Otoño 2015

1. Asuma que se eligen n números $a_1, \ldots, a_n$ aleatoriamente en el intervalo $[0,1)$ bajo una distribución uniforme (es decir, todo número tiene la misma probabilidad de ser elegido). Repartimos estos números en n archivos $B[0], B[1], \ldots, B[n-1]$ de tal forma que a_i se coloca en el archivo $B[\lfloor na_i \rfloor]$.

   Sea n_i el número de a_j's que aparecen en el archivo i, para $0 \leq i \leq n-1$. En este ejercicio calcularemos el valor esperado (esperanza) de n_i^2. Para ello expresamos n_i como $\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$, donde X_{ij} es la variable indicatoria que vale 1 si a_j se coloca en archivo $B[i]$, y vale 0 en caso contrario.

   a) (1,5ptos) Calcule el valor esperado $E(X_{ij}^2)$, para $0 \leq i \leq n-1$ y $1 \leq j \leq n$.

   Solución: Sabemos que X_{ij} vale 1 con probabilidad $1/n$ y 0 con probabilidad $(n-1)/n$. Lo mismo vale, por tanto, para X_{ij}^2. Por definición de valor esperado obtenemos que $E(X_{ij}^2) = 1/n$.

   b) (1,5ptos) Calcule el valor esperado $E(X_{ij}X_{ik})$, para $0 \leq i \leq n-1$ y $1 \leq j,k \leq n$ con $j \neq k$.

   Solución: Este valor esperado coincide con la probabilidad de que ambos X_{ij} y X_{ik} valgan 1. Pero estos eventos son independientes (es decir, uno no afecta al otro) ya que $j \neq k$, y por tanto esta probabilidad corresponde al producto de las probabilidades de los respectivos eventos. Es decir, $E(X_{ij}X_{ik}) = 1/n^2$.

   c) (1pto) Exprese n_i^2 en términos de los X_{ij}^2, para $1 \leq j \leq n$, y de los $X_{ij}X_{ik}$, para $1 \leq j,k \leq n$ con $j \neq k$.

   Solución: Claramente, $n_i^2 = \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{n} X_{ij}X_{ik}$.

   d) (2pts) Utilizando la expresión anterior demuestre que el valor esperado de n_i^2 es $2 - 1/n$.

   Solución: El valor esperado de n_i^2 es el valor esperado de $\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{n} X_{ij}X_{ik}$. Pero dado que el valor esperado es lineal, esto último coincide con:

   $$\sum_{j=1}^{n} E(X_{ij}^2) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{n} E(X_{ij}X_{ik}).$$

   Utilizando (a) y (b) obtenemos que esto es igual a:

   $$\sum_{j=1}^{n} 1/n + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{n} 1/n^2 \; = \; n(\frac{1}{n}) + n(n-1)(\frac{1}{n^2}) \; = 2 - 1/n.$$

   Concluímos que $E(n_i) = 2 - 1/n$.

2. Asuma que tenemos n tareas $t_1, \dots, t_n$, y que con cada tarea t_i ($1 \leq i \leq n$) asociamos la siguiente información:

   - El momento $c_i \geq 0$ en que la tarea comienza y otro $f_i > c_i$ en que finaliza.
   - El beneficio $b_i > 0$ de que la tarea se ejecute.

   Decimos que las tareas t_i y t_j son *compatibles* si sus intervalos de ejecución no se intersectan; es decir, si $f_i < c_j$ o $f_j < c_i$.

   Asuma ahora que las tareas $t_1, \dots, t_n$ se hallan ordenadas no decrecientemente con respecto a los términos de finalización de tareas; es decir, para todo $1 \leq i \leq j \leq n$ se cumple que $f_i \leq f_j$. Defina $B : \{0, \dots, n\} \to \mathbb{N}$ de tal forma que $B(i)$ corresponde al mayor beneficio que se puede obtener al ejecutar algunas de las i primeras tareas de forma compatible. Formalmente:

   $$B(i) \;=\; \max\{\sum_{t_j \in A} b_j \mid A \subseteq \{t_1, \dots, t_i\} \text{ y no hay dos tareas distintas en } A \text{ que sean incompatibles}\}.$$

   a) (4pts) Defina recursivamente a $B(i)$ en términos de $B(i-1)$ y $B(\mathrm{pred}(i))$, donde $\mathrm{pred}(i)$ es el mayor $j < i$ tal que t_j y t_i son compatibles.

   Solución: Hay dos posibilidades para un subconjunto A de $t_1, \dots, t_i$ que maximiza el beneficio: Contiene a t_i o no. Si no lo contiene entonces $B(i) = B(i-1)$. Si lo contiene entonces no puede contener a ningún t_k tal que $\mathrm{pred}(i) < k \leq i$. Por tanto, $B(i) = B(\mathrm{pred}(i)) + b_i$. Esto quiere decir que:

   $$B(i) \;=\; \max\{B(i-1), B(\mathrm{pred}(i)) + b_i\}.$$

   b) (2pts) De lo anterior, ¿qué podemos concluir con respecto al costo del problema de computar un conjunto de tareas mutuamente compatibles que maximicen el beneficio?

   Solución: El costo de computar tal conjunto es polinomial (no más que $O(n^2)$ en un cálculo grosero). Ordenamos $t_1, \dots, t_n$ de tal forma que los términos de finalización sean no decrecientes. Luego, para cada $1 \leq i \leq n$ computamos $\mathrm{pred}(i)$. Finalmente calculamos iterativamente $B(i)$ y en cada paso decidimos si agregar b_i o no a nuestro conjunto (lo agregamos si $B(\mathrm{pred}(i)) + b_i > B_{i-1}$). Al finalizar tendremos nuestro conjunto que maximiza el beneficio (y también su beneficio).

3. Sea R_n el número de regiones que se generan en la superficie de una esfera al ser dividida por n grandes círculos (es decir por n planos que pasan por el centro de la esfera), asumiendo que no hay tres de estos grandes círculos que pasen por el mismo punto.

   - (4pts) Explique por qué $R_{n+1} = R_n + 2n$, para $n \geq 1$.

   Solución: Usamos el siguiente razonamiento. Cada nuevo círculo corta a cada uno de los otros circulos en exactamente dos puntos. Es decir, el número de puntos en que el nuevo círculo corta a los n círculos anteriores es $2n$ (y todos estos puntos son distintos ya que no hay tres círculos que pasen por el mismo punto). Además, cada uno de estos cortes genera un nuevo arco en la superficie de la esfera, y este arco corta una región ya existente. Por tanto, el número de regiones generadas es $2n$. Esto quiere decir que el nuevo número de regiones es $R_n + 2n$.

- (2pts) Resuelva iterativamente la expresión anterior.

  Solución: Iterativamente obtenemos que $R_n = R_1 + 2\sum_{j=1}^{n-1} j = 2 + n(n-1)$.