UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 2 - Semestre Primavera 2015

1. Se define un *árbol binomial* de la siguiente forma:

   a) Un único nodo es el árbol binomial B_0.

   b) Dados dos árboles binomiales B_n, el árbol binomial B_{n+1} se forma tomando uno de ellos y agregando un nuevo hijo a su raíz, del que colgará el otro árbol B_n.

   Un *bosque binomial* es un conjunto de árboles binomiales, donde no hay dos árboles B_n para un mismo n.

   Se pide demostrar por inducción:

   a) Que B_n tiene 2^n nodos, altura n (la altura de un único nodo es cero), y que la raíz tiene n hijos.

   b) Que B_n tiene $\binom{n}{k}$ nodos a profundidad k, para todo $0 \leq k \leq n$ (la profundidad de la raíz es cero). Recuerde la identidad $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

   c) Que para todo N, existe un bosque binomial con exactamente N nodos (puede ser útil hacer inducción sobre N y sobre la cantidad de árboles del bosque).

   d) Que ese bosque es único, es decir que dos bosques distintos tienen un número distinto de nodos (en este caso puede ser mejor usar el principio del buen orden).

   Solución (sketch): (a) es trivial, (b) deben notar que los nodos a profundidad k de un B_n formado con dos B_{n-1} son los que estan a profundidad k en el primero más los que están a profundidad $k-1$ del otro, y usar la indicación. (c) inducción sobre N. Si N es impar, el bosque tiene un B_0 necesariamente, luego nos queda hacer un bosque con exactamente $N-1$ nodos, que se puede hacer por H.I. Si N es par, se puede hacer un bosque con $N/2$ nodos por H.I., y luego se reemplaza cada B_n por un B_{n+1}. Hay muchas otras respuestas válidas. (d) De ser así, existe un árbol de tamaño mínimo B_n que está en un bosque y no en el otro, por el principio del buen orden. Entonces el N del que no tiene B_n es divisible por 2^{n+1}, y el N del que tiene B_n no.

2. Use el principio del buen orden para probar las siguientes propiedades:

   a) Dados dos números naturales n y m, existe un único máximo común divisor y un único mínimo común múltiplo entre ellos.

   b) Todo número natural n se puede expresar como $n = 2^k\ell$, donde k es un natural (incluido 0) y ℓ es un natural impar.

   c) Todo número racional positivo r se puede expresar como p/q, donde p y q son naturales sin factores comunes entre ellos.

   Solución (sketch): (a) El 1 divide a ambos y el nm es divisible por ambos, por lo tanto los conjuntos de divisores y múltiplos no son vacíos y son positivos. Por el principio del buen orden, existe un mínimo común múltiplo. Para el divisor, podemos formar un conjunto poniendo $mn - d$ por cada divisor d, con lo que también son no negativos y por lo tanto tienen un mínimo. El mínimo $mn - d$ corresponde al máximo divisor d.

(b) Consideremos todos los k tal que $n = 2^k \ell$ para algún ℓ. No es vacío porque podemos tener $k = 0$ y $\ell = n$. Entonces tienen un máximo (haciendo una transformación como en (a)). Para el máximo k, ℓ tiene que ser impar, pues sino también $k + 1$ está en el conjunto.

(c) Sea el conjunto de los p, no vacío pues podemos tener $p = r$ y $q = 1$. El mínimo p existe, y el q correspondiente no puede tener un factor común f con p pues sino p/f también está en el conjunto (asociado a q/f).

3. Definamos el conjunto de expresiones proposicionales bien formadas P sobre un conjunto de variables V, de la siguiente forma:

    a) Una variable de V está en P.
    b) Si α y β están en P, entonces $(A) \vee (B)$, $(A) \wedge (B)$ y $\sim (A)$ están en P

    Se pide lo siguiente:

    a) Establezca una recurrencia que dé el número $E(n)$ de expresiones proposicionales bien formadas que usan n conectivos lógicos ($\wedge$, $\vee$, $\sim$). Use v para denotar $|V|$.
    b) Calcule desde $E(0)$ hasta $E(4)$ suponiendo $v = 2$, y dibuje los $E(1)$ elementos de P que tienen un operador.

    Solución (sketch): (a) $E(0) = v$, y para $n > 0$, $E(n) = E(n-1) + 2\sum_{k=0}^{n-1} E(k) \cdot E(n-k-1)$, considerando el not y después el and/or.

    (b) $E(0) = 2$, $E(1) = 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10$, $E(2) = 10 + 2 \cdot (2 \cdot 10 + 10 \cdot 2) = 90$, $E(3) = 90+2\cdot(2\cdot90+10\cdot10+90\cdot2) = 1010$, $E(4) = 1010+2\cdot(2\cdot1010+10\cdot90+90\cdot10+1010\cdot2) = 8650$. Los $E(1) = 10$ elementos sobre variables p y q son $\sim p$, $\sim q$, $p \vee p$, $p \vee q$, $q \vee p$, $q \vee q$, $p \wedge p$, $p \wedge q$, $q \wedge p$, y $q \wedge q$.