

Auxiliar 5

Ilana Mergudich T., Arniel Labrada D.
Inducción

April 24, 2018

1. Sea n un número natural cualquiera. Definimos $d_i(n)$ como el dígito que aparece en la posición i en n con $d_1(n)$ el dígito más significativo, por ejemplo $d_3(n)(1850) = 5$. Demuestre que para todo n con k dígitos se cumple que:

$$n - \sum_{i=1}^k d_i(n) = 9r$$

o sea que n menos la suma de sus dígitos es siempre un múltiplo de 9.

2. Sea $f : N^+ \rightarrow N$ una función definida como sigue:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2 * f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n & n > 1 \end{cases}$$

Demuestre utilizando inducción fuerte que $f(n)$ es $O(n \log n)$

3. Demuestre la fórmula de Euler para figuras poligonales (figuras formadas por polígonos unidos en los vértices) sobre un plano. La fórmula dice que $C - L + N = 1$; en que C es el número de celdas cerradas, L es el número de trazos rectos, y N es el número de vértices en la figura
4. Hay un plato de galletas en una mesa. Tu y un amigo deciden jugar un juego con ellas. En este juego el que saque la última galleta del plato pierde, los jugadores, partiendo contigo, se van alternando para retirar al menos una galleta del plato y máximo 3. Determina qué tiene que pasar para que tengas una estrategia ganadora (Es decir, ganes independiente de lo que haga tu amigo) y luego demuéstrelo usando inducción.
Hint: Analice que ocurre cuando hay menos de 5 galletas y luego vea como realizar la inducción.
5. Demuestre por inducción que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5.