Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-1 Probabilidades y Estadística
Verano 2017

Guía ejercicios 2

1. Considere dos dados equilibrados que se lanzan simultáneamente. Sea X la variable aleatoria igual al producto de los dos dados. Describa el espacio muestral Ω, calcule $\mathbb{P}(X = i)$, $i = 1, 2, \dots$ y finalmente calcule la función de distribución discreta asociada a X.

2. Se extraen 4 bolitas al azar y sin reemplazo de una urna que tiene 20 bolitas numeradas del 1 al 20. Sea X el número mayor de las bolitas extraídas. Indicar el rango de X y su función de distribución discreta.

3. Sea $a \in \mathbb{R}$ y

$$A = \begin{pmatrix} \Pi_{i=1}^{n}(Y - i) + a & aY \\ 1 & Y \end{pmatrix}$$

Calcular la probabilidad de que A sea invertible si $Y \sim \text{geom}(p)$. Calcule la misma probabilidad pero ahora asumiendo que Y es una variable aleatoria absolutamente continua.

4. Para una cierta constante C, la variable aleatoria X tiene densidad $f_X(x) = Cx^n \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Calcular C, obtener $\mathbb{P}(X > x)$ para $x \in [0, 1]$, y encontrar la función F_X.

5. Se dispone de un cordel de largo L, el cual se corta en un punto escogido al azar (es decir, uniformemente).

a) Sea X el largo del trozo mayor. Muestre que X es una variable uniforme en el intervalo $[L/2, L]$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el largo del trozo mayor sea a lo más 4 veces el largo del trozo menor?

6. Los trenes que van a la ciudad A parten desde la estación de origen cada 15 minutos desde las 7:00, mientras que los trenes que van a la ciudad B parten cada 15 minutos desde las 7:05. Si una persona llega a la estación de origen en un tiempo distribuido uniformemente entre las 7:00 y las 8:00 y aborda el primer tren que parte, ¿cuál es la probabilidad que llegue a la ciuidad A?

7. Sea F la función de distribución acumulada de alguna variable aleatoria. Suponga que F es invertible.

a) Sea X variable aleatoria tal que $F_X = F$. ¿Qué variable aleatoria es $F(X)$?

b) Sea Y variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$. ¿Cuál es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria $F^{-1}(Y)$?

8. Se dice que una variable aleatoria S tiene una distribución *chi-cuadrado con 1 grado de libertad*, anotado $S \sim \chi_1^2$, si su función densidad es

$$f_S(x) = \frac{x^{-1/2}e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Pruebe que si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ entonces $Z^2 \sim \chi_1^2$.

9. Un estudiante debe llegar a su clase de las 8:30, para lo cual espera un autobús en el paradero. El autobús que pasa a las 7:30 tarda 40 minutos en llegar a la facultad, pero el autobús de las 7:40 tarda 50 minutos. Si el estudiante no alcanza el autobús de las 7:40, debe tomar el colectivo de las 7:45, que en 35 minutos lo deja en la facultad. Si la hora de llegada del estudiante al paradero se distribuye uniformemente entre las 7:25 y las 7:45, ¿cuál es el valor esperado de la hora de llegada a su clase?

10. Calcule $\mathbb{E}(X)$ si X tiene densidad dada por

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}xe^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 5/x^2 & x > 5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

11. Sea $X \sim \text{bin}(n, p)$. Muestre que

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1 + X}\right) = \frac{1 - (1 - p)^{n+1}}{(n + 1)p}.$$

12. *a)* Sea X variable aleatoria con densidad f_X simétrica, es decir, $f_X(x) = f_X(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que la densidad de la variable aleatoria $|X|$ es $f_{|X|}(x) = 2f_X(x)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.

b) Sea X variable $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Calcule $\mathbb{E}(|X|)$.

13. Se anuncia un corte de luz en su sector de la ciudad, por lo cual usted decide cargar 4 baterías para un cierto dispositivo electrónico. Los tiempo que tardan en cargarse son: 5 horas, 3 horas, 1 hora y 1 hora, y usted las va a cargar una después de otra en ese orden. Suponiendo que el tiempo que tarda en cortarse la luz es una variable aleatoria uniforme entre 0 y 12 horas, calcule la esperanza de la cantidad de baterías que quedan completamente cargadas.

14. Un estudiante debe llegar a su clase de las 8:30, para lo cual espera un autobús en el paradero. El autobús que pasa a las 7:30 tarda 40 minutos en llegar a la facultad, pero el autobús de las 7:40 tarda 50 minutos. Si el estudiante no alcanza el autobús de las 7:40, debe tomar el colectivo de las 7:45, que en 35 minutos lo deja en la facultad. Si la hora de llegada del estudiante al paradero se distribuye uniformemente entre las 7:25 y las 7:45, ¿cuál es el valor esperado de la hora de llegada a su clase?

15. Un árbol limonero tiene 3 limones que usted puede alcanzar de un salto, uno arriba del otro, y a alturas de 2,10m, 2,15m y 2,20m del suelo. Cada vez que usted salta a una altura suficiente, usted saca el limón más bajo disponible. Suponga que usted salta 3 veces y cada salto tiene altura distribuida uniformente entre 2,0m y 2,25m, independiente del resto. Si X es la cantidad de limones obtenidos, calcule p_X y obtenga $\mathbb{E}(X)$.

16. La *mediana* de una variable aleatoria X es el valor $m \in \mathbb{R}$ tal que $F_X(m) = 1/2$. Es decir, m es tal que la variable X tiene igual probabilidad de ser menor que m que de ser mayor que m. Calcular la mediana de: (a) $X \sim \text{unif}(a, b)$, (b) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, y (c) $X \sim \exp(\lambda)$.

17. Un grupo de n hombres y m mujeres se forman al azar en una fila. Determine el número esperado de hombres que tienen al menos una mujer al lado suyo. *Indicación:* defina una variable indicatriz adecuada por cada hombre y use la linealidad de la esperanza.

18. Se dispone de una urna con N bolitas numeradas de 1 a N. Se extraen bolitas con resposición de manera independiente hasta que haya salido cada bolita al menos una vez. Sea X la variable que denota la cantidad total de extracciones realizadas, y sea X_k la cantidad de extracciones desde la vez $k - 1$ que aparece una bolita que no había salido antes (excluyendo esa extracción) hasta la siguiente vez que aparece una bolita que no ha salido antes (incluyendo esa extracción), para $k = 1, \dots, N$. Deduzca la distribución de cada X_k, y obtenga una expresión para $\mathbb{E}(X)$.

19. N cazadores están cazando patos. Cuando una bandada de patos aparece volando, los N cazadores disparan al mismo tiempo. Cada cazador escoge un pato al azar para dispararle, y le acierta con probabilidad p, independiente del resto. Si aparece una bandada de k patos, calcule la cantidad esperada de patos que quedan ilesos.

20. Sea X variable aleatoria. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $s(\alpha) = \mathbb{E}[(X-\alpha)^2]$. Pruebe que para todo α se tiene que $s(\alpha) \geq \operatorname{var}(X)$ y que se alcanza la igualdad solo cuando $\alpha = \mathbb{E}(X)$.

21. Sea $X \sim \operatorname{unif}(-1,1)$ y sea $Y = X^2$. Muestre que $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, pero X e Y no son independientes. *Observación:* recuerde que si dos variables son independientes, entonces su covarianza es 0; este es un ejemplo de que la implicancia recíproca es falsa en general.

22. Decimos que una variable aleatoria X tiene distribución de *Laplace* de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $b > 0$, si su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Muestre que la función generadora de momentos de X es $M_X(t) = e^{\mu t}/(1 - b^2 t^2)$ para $|t| < 1/b$.

b) Calcule la esperanza y varianza de X.

c) Suponiendo $\mu = 0$, calcule la densidad de $|X|$. ¿Qué variable conocida es $|X|$?

d) Sean $Y_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $Y_2 \sim \exp(\lambda_2)$ variables independientes. Pruebe que $\lambda_1 Y_1 - \lambda_2 Y_2$ tiene distribución de Laplace con parámetros $\mu = 0$ y $b = 1$.

23. Decimos que una variable aleatoria W tiene distribución *beta* de parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, anotado $W \sim \operatorname{Beta}(\alpha, \beta)$, si su densidad es

$$f_W(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x),$$

donde Γ es la función gamma.

a) Calcule $\mathbb{E}(W)$ y $\operatorname{var}(W)$. *Indicación:* no calcule las integrales involucradas; en cambio, utilice el hecho que la densidad de una variable beta de parámetros adecuados debe integrar 1. Use también que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ para todo $t > 0$.

b) Si $Z \sim \operatorname{Beta}(\alpha, 1)$, calcule la distribución de Z^α.

c) Sean $X_1, \ldots, X_n$ independientes con distribución $\operatorname{unif}(0,1)$, y sea $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Muestre que $Z \sim \operatorname{Beta}(1, n)$.

d) Sean $X \sim \operatorname{gamma}(\alpha, \lambda)$ e $Y \sim \operatorname{gamma}(\beta, \lambda)$ independientes, y sea $U = X/(X+Y)$. Pruebe que $U \sim \operatorname{Beta}(\alpha, \beta)$. *Indicación:* defina $V = X + Y$ y utilice el método del jacobiano.

24. Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución *log-normal* con parámetros μ y σ^2 si $Y = \ln(X)$ tiene distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

a) Pruebe que la densidad de X es

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

b) Pruebe que para todo $s \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(X^s) = e^{\mu s + \sigma^2 s^2/2}$. Obtenga la esperanza y varianza de X. *Indicación:* utilice la función generadora de momentos de una variable $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

c) Pruebe que la f.g.m. $M_X(t)$ no está definida para $t > 0$.

d) Sea $U \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, y sean $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$. Pruebe que $V = \alpha + \beta U$ tiene distribución $\mathcal{N}(\alpha + \beta\mu, \beta^2\sigma^2)$. Utilice esto para obtener la distribución de aX^b, donde $a > 0$ y $b \neq 0$.

e) Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes con distribución log-normal de parámetros μ_1, σ_1^2 y μ_2, σ_2^2, respectivamente. ¿Cuál es la distribución de $Z = X_1 X_2$?

25. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones generadoras de momentos dadas por

$$M_X(t) = e^{2e^t - 2} \quad \text{y} \quad M_Y(t) = \frac{e^t/2}{1 - e^t/2}.$$

Pruebe que $\mathbb{P}(XY = 1) = 1/e^2$. *Indicación:* recuerde que la función generadora de momentos caracteriza la distribución de una variable aleatoria.

26. Sean $X \sim \operatorname{binom}(n,p)$ e $Y \sim \operatorname{binom}(m,p)$ variables independientes. ¿Cuál es la distribución de $Z = X + Y$? Repita para $X \sim \operatorname{Poisson}(\lambda)$ e $Y \sim \operatorname{Poisson}(\mu)$ independientes. *Indicación:* utilice las propiedades de la función generadora de momentos.

27. Sean X, Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2(x+y) & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule las densidades marginales de X e Y. ¿Son independientes? Explique. *Indicación:* dibuje la región en que la densidad conjunta es estrictamente positiva.

28. Dos personas acordaron juntarse en cierto lugar. Cada uno de ellos llega en un instante distribuido uniformemente entre las 12:00 y las 13:00, independiente de la otra persona. Calcule la probabilidad de que el que llega primero tenga que esperar más de 10 minutos.

29. Para ir de la Facultad a su casa, usted tiene dos opciones: puede esperar el bus de la línea A en el paradero correspondiente, o bien el bus de la línea B en otro paradero. Los tiempos T_A y T_B (en minutos) que tarda en pasar el siguiente bus de la línea respectiva son variables aleatorias exponenciales independientes de parámetros λ_A y λ_B, respectivamente. Suponga que usted escoge el paradero al azar, independiente de T_A y T_B. Sea T su tiempo de espera para abordar al bus.

a) Muestre que $\mathbb{P}(T_A < T_B) = \lambda_A/(\lambda_A + \lambda_B)$.

b) Si a los t minutos usted sigue en el paradero, ¿cuál es la probabilidad de que esté esperando el bus de la línea A? Suponiendo $\lambda_B > \lambda_A$, ¿qué ocurre cuando t es grande?

c) Usted cambia su estrategia: se ubica a medio camino entre los paraderos, y apenas visualiza el primer bus que viene llegando, usted corre al paradero correspondiente y aborda el bus. ¿Cuál es la distribución de T con esta estrategia?

30. Obtenga la densidad de la suma de dos variables independientes con distribución $\operatorname{unif}(0,1)$.

31. Sean X e Y las coordenadas de un punto escogido uniformemente al azar en el círculo de radio 1 centrado en el origen. Obtenga la distribución conjunta y las densidades marginales de las coordenadas polares (R, Θ) del punto (X,Y). ¿Son independientes R y Θ?

32. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x^2 y^2}, \quad x \geq 1, y \geq 1.$$

Se definen las variables aleatorias $U = XY$, $V = X/Y$.

a) Calcule la densidad conjunta de (U,V).

b) Encuentre las densidades marginales de U y V.