Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
5 de Enero de 2018

Pauta Control N°2 MA2002

Profesor: Gonzalo Flores G.
Auxiliar: Nicolás Zalduendo V.

P1. (a) i) Tenemos en este caso que $u(x,y) = e^x \cos(y)$ y $v(x,y) = -e^x \operatorname{sen}(y)$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos(y) & \frac{\partial v}{\partial y} &= -e^x \cos(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \operatorname{sen}(y) & \frac{\partial v}{\partial x} &= -e^x \operatorname{sen}(y) \end{aligned}$$

Luego, en virtud de las condiciones de Cauchy-Riemann, requerimos que

$$\cos(y) = 0 \quad \wedge \quad \operatorname{sen}(y) = 0,$$

lo que es imposible. Luego, f no satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en ningún $z \in \mathbb{C}$, por lo que no es derivable en ningún punto del plano complejo.

ii) Aquí, tenemos que

$$(z-i)\overline{z} = (x + i(y-1))(x - iy) = (x^2 + y^2 - y) - ix,$$

es decir, $u(x,y) = x^2 + y^2 - y$ y $v(x,y) = -x$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x & \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y - 1 & \frac{\partial v}{\partial x} &= -1 \end{aligned}$$

En virtud de las condiciones de Cauchy-Riemann, requerimos que

$$x = 0 \quad \wedge \quad y = 1.$$

Como además la función

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - y \\ -x \end{pmatrix}$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ (en particular en $(0,1)$), concluimos que g es derivable sólo en $z = 0 + i \cdot 1 = i$. Finalmente, sabemos que

$$g'(i) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,1) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(0,1) = -i.$$

(b) Sabemos que $u(x,y) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$ es la parte real de una función holomorfa h. En particular, se deben cumplir las condiciones de Cauchy-Riemann y así $v(x,y)$ satisface

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2-y^2} \cos(2xy) - 2ye^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy).$$

Luego, $v(x,y) = e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy) + c$, con $c \in \mathbb{R}$. Es claro que dicha función satisface

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Como además $f(i) = e^{-1}$, necesitamos que $v(0,1) = 0$, de donde se deduce que $c = 0$.

P2. **(a)** Siguiendo la indicación, descomponemos en fracciones parciales, de donde obtenemos que

$$\frac{z+1}{z(4-z)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4-z}.$$

Pero además se tiene que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2-(2-z)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{2-z}{2}}$$

y

$$\frac{1}{4-z} = \frac{1}{2-(z-2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-2}{2}}.$$

En ambos casos, cuando $|z-2|<2$, los valores indicados corresponden a una suma geométrica. Más precisamente, se tiene que

$$\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2-z}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}(z-2)^k$$

y

$$\frac{1}{4-z} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}(z-2)^k.$$

Así, tenemos finalmente que

$$\frac{z+1}{z(4-z)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k+5}{2^{k+2}}(z-2)^k,$$

serie que es convergente para $|z-2|<2$. Notamos así que el radio de convergencia verifica $R\geq 2$. Pero no puede ser mayor a 2, ya que en dicho caso la serie y la función coincidirían en $z=0$ y $z=4$, lo que es imposible, ya que la función no está definida en esos valores. Por lo tanto, $R=2$.

(b) Buscamos la serie de potencias en torno a $a=0$ de la solución de $g''(z)=2g(z)+1$, $g(0)=1$, $g'(0)=0$. Dicha serie de potencias viene dada por

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

De esta forma,

$$g''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}z^k.$$

Reemplazando en la ecuación, tendremos que

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2}-2c_k]z^k = 1,$$

de manera que

$$2c_2 - 2c_0 = 1 \quad \wedge \quad c_{k+2} = \frac{2}{(k+2)(k+1)}c_k\,, \forall k\geq 1.$$

Así, tendremos que

$$c_0 = 1,\ c_1 = 0,\ c_2 = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad c_k = \frac{2}{k(k-1)}c_{k-2}\,, \forall k\geq 3.$$

De aquí se desprende que para $k \geq 1$

$$c_k = \begin{cases} 0 & , \quad k \text{ es impar.} \\ \frac{3 \cdot 2^{k/2-1}}{k!} & , \quad k \text{ es par.} \end{cases}$$

de manera que

$$g(z) = 1 + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Así mismo,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{k \to \infty} \sqrt[2k]{\frac{3}{4} \frac{2^k}{2k!}} = 0,$$

con lo que el radio de convergencia es $R = \infty$.

P3. **(a)** Para $\alpha \in (0, 2\pi)$ y $R > 0$ consideramos el borde del segmento circular de radio R comprendido entre los ángulos 0 y α. Como f es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y el borde del segmento circular, que en adelante llamaremos Γ, es una curva cerrada simple, tendremos en virtud del teorema de Cauchy-Goursat que

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Consideremos las parametrizaciones siguientes para dicho borde

$$\begin{array}{lcl} \gamma_1(t) = t & , & t \in [0, R] \\ \gamma_2(t) = Re^{it} & , & t \in [0, \alpha] \\ \gamma_3(t) = te^{i\alpha} & , & t \in [R, 0] \end{array}.$$

De esta forma, tenemos que

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^R f(t) dt + \int_0^{\alpha} f(Re^{it}) \cdot iRe^{it} dt - \int_0^R f(te^{i\alpha}) \cdot e^{i\alpha} = 0.$$

Es claro que la primera y tercera integral convergen a

$$\int_0^{\infty} f(t) dt \quad \text{y} \quad e^{i\alpha} \int_0^{\infty} f(te^{i\alpha}) dt$$

cuando $R \to \infty$, respectivamente. Veamos que la segunda integral converge a 0 cuando $R \to \infty$. En efecto

$$\left| \int_0^{\alpha} f(Re^{it}) \cdot iRe^{it} dt \right| \leq R \int_0^{\alpha} |f(Re^{it})| dt \xrightarrow{R \to 0} 0,$$

esto último por la hipótesis sobre f. Concluimos así que

$$\int_0^R f(t) dt = e^{i\alpha} \int_0^R f(te^{i\alpha}),$$

que es el resultado pedido.

(b) Debemos verificar que

$$\lim_{R \to 0} R \int_0^{\alpha} \left| e^{-R^2 e^{2i\theta}} \right| d\theta = 0$$

para todo $\alpha \in (0, \pi/4)$. Para ello fijemos α en dicho intervalo y notemos que

$$e^{-R^2 e^{2i\theta}} = e^{-R^2 \cos(2\theta) - iR^2 \operatorname{sen}(2\theta)} = e^{-R^2 \cos(2\theta)} e^{-iR^2 \operatorname{sen}(2\theta)},$$

de manera que

$$\left| e^{-R^2 e^{2i\theta}} \right| = e^{-R^2\cos(2\theta)}.$$

Gráficamente, se puede verificar que para todo $\theta \in [0, \pi/2]$ se tiene que

$$\cos(2\theta) \geq -\frac{4}{\pi}\theta + 1,$$

ya que la recta que une los puntos $(0,1)$ y $(\pi/4, 0)$ queda siempre por debajo del gráfico de $\cos(2\theta)$ en dicho intervalo. En particular, esto es cierto para $\theta \in [0, \alpha]$. Luego

$$e^{-R^2\cos(2\theta)} \leq e^{-R^2} e^{4R^2\theta/\pi}.$$

Usando todo esto, tendremos que

$$\begin{aligned} R\int_0^\alpha \left| e^{-R^2e^{2i\theta}} \right| d\theta \leq Re^{-R^2}\int_0^\alpha e^{4R^2\theta/\pi} d\theta &= \frac{\pi e^{-R^2}}{4R}(e^{4R^2\alpha/\pi} - 1) \\ &= \frac{\pi}{4R}(e^{-R^2(1-4\alpha/\pi)} - e^{-R^2}) \xrightarrow{\mathbb{R}\to\infty} 0, \end{aligned}$$

esto ya que como $\alpha \in (0, \pi/4)$, entonces $1 - 4\alpha/\pi > 0$. Así, $f(z) = e^{-z^2}$ satisface la condición pedida.

(c) Usando las partes **(a)** y **(b)**, tenemos ahora que para $\alpha = \pi/8$

$$e^{i\pi/8}\int_0^\infty e^{-e^{i\pi/4}x^2} dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Analicemos la integral del lado izquierdo. Para ello, vemos que

$$\begin{aligned} e^{-e^{i\pi/4}x^2} &= e^{-x^2\cos(\pi/4) - ix^2\operatorname{sen}(\pi/4)} = e^{-x^2/\sqrt{2} - ix^2/\sqrt{2}} \\ &= e^{x^2/\sqrt{2}}\cos(x^2/\sqrt{2}) - ie^{x^2/\sqrt{2}}\operatorname{sen}(x^2/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Así, usando el cambio de variables $x = \sqrt[4]{2}u$ tendremos que

$$\int_0^\infty e^{-e^{i\pi/4}x^2} dx = \sqrt[4]{2}\left(\int_0^\infty e^{-u^2}\cos(u^2)du - i\int_0^\infty e^{-u^2}\operatorname{sen}(u^2)du\right).$$

Obtenemos de esta forma que

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\cos(u^2)du - i\int_0^\infty e^{-u^2}\operatorname{sen}(u^2)du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}e^{-i\pi/8} = \frac{\sqrt{\pi}\cos(\pi/8)}{2\sqrt[4]{2}} - i\frac{\sqrt{\pi}\operatorname{sen}(\pi/8)}{2\sqrt[4]{2}}.$$

Igualando partes real e imaginaria, concluimos así que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}\cos(\pi/8)}{2\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi(1+\sqrt{2})}}{4}$$

y

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{sen}(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}\operatorname{sen}(\pi/8)}{2\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi(1-\sqrt{2})}}{4}.$$