

Pauta Examen MA2002

Profesor: Gonzalo Flores G.
 Auxiliar: Nicolás Zalduendo V.

- P1. (a)** Es fácil ver que la superficie S es regular. Como la superficie de un cilindro también lo es, tendremos que el volumen (que llamaremos V) comprendido entre S y el manto del cilindro $x^2 + y^2 = a^2/4$, $|z| \leq a\sqrt{3}/2$ (el cual en adelante llamaremos C) tiene frontera regular por trozos. Por otra parte, en el dominio Ω se tiene que $\rho > 0$, por lo que $\vec{F}$ resulta ser un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω . Así, en virtud del Teorema de la Divergencia

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS - \iint_C \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) dV,$$

donde S está orientado según la normal exterior del casquete esférico y C lo está según la normal exterior al cilindro. Notemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F}) &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho F_z) \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (1) + \frac{\partial}{\partial \theta} (0) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho^2) \right) = 0. \end{aligned}$$

De aquí se desprende que el flujo solicitado es igual a

$$\begin{aligned} \iint_C \vec{F} \cdot \hat{n} dS &= \int_{-a\sqrt{3}/2}^{a\sqrt{3}/2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{a} \hat{\rho} + \frac{a}{2} \hat{k} \right) \cdot \frac{a}{2} \hat{\rho} d\theta dz = \int_{-a\sqrt{3}/2}^{a\sqrt{3}/2} \int_0^{2\pi} d\theta dz \\ &= 2a\pi\sqrt{3} \end{aligned}$$

- (b)** Notemos que la curva indicada corresponde a la circunferencia de ecuación $y^2 + z^2 = 1$ con $x = 1$, la cual resulta ser regular. Vemos además que dicha curva puede ser interpolada por la porción del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con $x \geq 1$, el cual es regular. Llamemos ahora S a dicha porción. Vemos finalmente que $\vec{G}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω y como además S y ∂S están alejados del eje Z , en virtud del Teorema de Stokes tendremos que

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS,$$

donde las orientaciones de S y ∂S son compatibles. Orientaremos S con respecto a la normal exterior del casquete esférico. Calculemos ahora $\operatorname{rot}(\vec{F})$.

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{r^2 \sin(\varphi)} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\varphi} & r\sin(\varphi)\hat{\theta} \\ \partial_r & \partial_\varphi & \partial_\theta \\ 0 & r\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sin(\theta)}{r\sin(\varphi)} \hat{r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \hat{\theta}.$$

Notemos además que en coordenadas esféricas, la superficie S viene dada por los parámetros $\varphi \in [\pi/4, 3\pi/4]$ y $\theta \in [0, \theta(\varphi)] \cup [2\pi - \theta(\varphi), 2\pi]$, con $r = \sqrt{2}$. La dependencia $\theta(\varphi)$ viene dada por

$$\theta(\varphi) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi)}\right).$$

Con esto, tendremos que

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_0^{\theta(\varphi)} \operatorname{sen}(\theta) d\theta + \int_{2\pi-\theta(\varphi)}^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta) d\theta \right) \sqrt{2} d\varphi \\ &= \sqrt{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{-\theta(\varphi)}^{\theta(\varphi)} \operatorname{sen}(\theta) d\theta d\varphi = 0,\end{aligned}$$

donde usamos la paridad y periodicidad de la función $\operatorname{sen}(\theta)$.

- P2. (a)** Notemos que derivando con respecto a x e y la igualdad del enunciado tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}au_x + bv_x &= 0 \\ au_y + bv_y &= 0\end{aligned}$$

Como suponemos que f es holomorfa, usando las condiciones de Cauchy-Riemann tendremos que

$$\begin{aligned}au_x - bu_y &= 0 \\ bu_x + au_y &= 0\end{aligned}$$

Este sistema se puede escribir matricialmente como $A\nabla u = 0$, donde la matriz A viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

que resulta ser invertible, ya que $\det(A) = a^2 + b^2 \neq 0$, ya que las constantes son no nulas. Así, $\nabla u = 0$. Nuevamente usando las condiciones de Cauchy-Riemann, se deduce de esto que $\nabla v = 0$. Luego, las funciones u y v son constantes, y por lo tanto, $f = u + iv$ lo es.

- (b) i) Notemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{1+a^2-2a\cos(x)} dx = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{1+a^2-2a\cos(x)} dx \right) + i \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+a^2-2a\cos(x)} dx \right).$$

Notamos que la última integral es 0, ya que la función

$$\frac{\operatorname{sen}(nx)}{1+a^2-2a\cos(x)}$$

es impar y es integrada en un intervalo simétrico. Se concluye así que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{1+a^2-2a\cos(x)} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{1+a^2-2a\cos(x)} dx$$

- ii) Queremos calcular

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{1+a^2-2a\cos(x)} dx.$$

Realizamos en esta integral el cambio de variables $z = e^{ix}$, de manera que

$$e^{inx} = z^n \quad \cos(x) = \frac{z+z^{-1}}{2} \quad dx = \frac{1}{iz}.$$

Así, la integral queda como

$$-\frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{az^2 - (1+a^2)z + a} dz = -\frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{(az-1)(z-a)} dz.$$

Notamos así que el integrando tiene singularidades en $z = a$ y $z = 1/a$. Como $a \in (0, 1)$, en virtud del Teorema de los residuos tendremos que lo anterior es igual a

$$= -\frac{1}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z^n}{(az-1)(z-a)}, a \right) = -2\pi \operatorname{Res} \left(\frac{z^n}{(az-1)(z-a)}, a \right),$$

esto ya que al ser el integrando un cociente de polinomios primos entre sí, se verifica que a es un polo simple. Pero

$$\operatorname{Res} \left(\frac{z^n}{(az-1)(z-a)}, a \right) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^n}{az-1} = \frac{a^n}{a^2-1}.$$

Concluimos así que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{1+a^2-2a\cos(x)} dx = -2\pi \cdot \frac{z^n}{az-1} = \frac{a^n}{a^2-1} = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}.$$

P3. (a) Notemos que

$$\frac{x}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x^2+1} \right)'.$$

Recordando que la transformada de Fourier es lineal y que

$$\hat{f}'(s) = is \cdot \hat{f}(s),$$

tendremos en virtud de la indicación que

$$\hat{f}(s) = -\frac{1}{2} \cdot is \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{-|s|}.$$

(b) i) Consideramos la ecuación

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = 0$$

y aplicamos transformada de Fourier con respecto a x a ambos lados. Recordando el comportamiento de la transformada con respecto a las derivadas, tendremos que

$$\hat{u}_{tt} + \alpha^2 (is)^4 \hat{u} = 0$$

de manera que

$$\hat{u}_{tt} + \alpha^2 s^4 \hat{u} = 0.$$

La solución general de esta EDO para t viene dada por

$$\hat{u}(s, t) = A(s) e^{i\alpha s^2 t} + B(s) e^{-i\alpha s^2 t}.$$

De la condición $u_t(x, 0) = 0$, desprendemos que $\hat{u}_t(s, 0) = 0$. Imponiendo esta condición en lo anterior, tendremos que

$$0 = \hat{u}_t(s, 0) = \alpha s^2 A(s) - \alpha s^2 B(s),$$

de donde $A(s) = B(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Por otra parte, de la condición $u(x, 0) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, desprendemos en virtud de la parte **(a)** que $\hat{u}(s, 0) = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{-|s|}$. Así, imponiendo esta condición

$$-\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{-|s|} = \hat{u}(s, 0) = A(s) + B(s).$$

De estas condiciones para $A(s)$ y $B(s)$ se tendrá finalmente que

$$A(s) = B(s) = -\frac{i}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{-|s|},$$

de manera que

$$\begin{aligned}\hat{u}(s, t) &= A(s)e^{i\alpha s^2 t} + B(s)e^{-i\alpha s^2 t} \\ &= -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}se^{-|s|} \cdot \frac{e^{i\alpha s^2 t} + e^{-i\alpha s^2 t}}{2} = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}se^{-|s|}\cos(\alpha s^2 t).\end{aligned}$$

ii) Calculemos la antitransformada de la función obtenida en i).

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(s, t)e^{isx} ds \\ &= -\frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} se^{-|s|}\cos(\alpha s^2 t)e^{isx} ds.\end{aligned}$$

Al separar esta última integral en sus partes real e imaginaria, tendremos que

$$= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} se^{-|s|}\cos(\alpha s^2 t)\sin(sx)ds - i \cdot \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} se^{-|s|}\cos(\alpha s^2 t)\cos(sx)ds.$$

Notamos que la integral que aparece en la parte imaginaria es igual a 0, ya que el integrando es impar. Así

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} se^{-|s|}\cos(\alpha s^2 t)\sin(sx)ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} se^{-s}\cos(\alpha s^2 t)\sin(sx)ds,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad ocupamos el hecho de que el integrando era una función par y que $|s| = s$ para $s \geq 0$.