Pauta Control N°3 MA2002

Profesor: Gonzalo Flores G.
Auxiliar: Nicolás Zalduendo V.

P1. (a) i) Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Luego

$$f(x) = \frac{e^{2ix} - 1}{x^2} = \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} + i \frac{\sin(2x)}{x^2},$$

de manera que

$$\operatorname{Re}(f(x)) = \frac{\cos(2x) - 1}{x^2}.$$

Recordando que $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, tendremos que $\cos(2x) - 1 = -2\sin^2(x)$. Por lo tanto

$$\operatorname{Re}(f(x)) = -\frac{2\sin^2(x)}{x^2}.$$

ii) Siguiendo la indicación, consideremos $z = x + iy$, con $y > 0$. Luego

$$e^{2iz} - 1 = e^{-2y+2ix} - 1 = (e^{-2y} \cos(2x) - 1) + i \cdot e^{-2y} \sin(2x).$$

De lo anterior se desprende que

$$|e^{2iz} - 1|^2 = (e^{-2y} \cos(2x) - 1)^2 + (e^{-2y} \sin(2x))^2 = e^{-4y} - 2e^{-2y} \cos(2x) + 1.$$

Como $\cos(2x) \geq -1$, tendremos que

$$|e^{2iz} - 1|^2 \leq e^{-4y} + 2e^{-2y} + 1 = (e^{-2y} + 1)^2.$$

Pero como $y > 0$, tendremos que $e^{-2y} \leq 1$, de donde concluimos que

$$|e^{2iz} - 1|^2 \leq 4.$$

Usando esto, vemos que para $z \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Im}(z) > 0$ se tiene que

$$|f(z)| = \frac{|e^{2iz} - 1|}{|z|^2} \leq \frac{2}{|z|^2}.$$

iii) De la parte **i)** y del hecho que el integrando es una función par tenemos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = -\frac{1}{4} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right).$$

Para esta última integral, tenemos ya verificada la condición de decaimiento probada en **ii)**. Resta verificar que la función $f(z)$ tiene finitos polos con parte imaginaria positiva y que los polos reales además de ser finitos, sean simples. Vemos así que la única singularidad de $f(z)$ es para $z = 0$. Vemos además que

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{2iz} - 1}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} 2ie^{2iz} = 2i,$$

donde usamos la regla de L'Hôpital. Con esto, el único polo es real y simple. Así, por el teorema de los residuos tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \pi i \cdot \operatorname{Res}(f, 0) = -2\pi.$$

Concluimos finalmente que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} dx = -\frac{1}{4} \cdot -2\pi = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Consideramos el cambio de variables $z = e^{i\theta}$. Notando que

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{z - z^{-1}}{2i} \quad \text{y} \quad \operatorname{cos}(\theta) = \frac{z + z^{-1}}{2},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{5 + 3 \operatorname{cos}(\theta)} d\theta &= \oint_{\partial D(0,1)} \frac{\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2}{5 + 3 \cdot \frac{z+z^{-1}}{2}} \cdot \frac{1}{iz} dz = -\frac{1}{2i} \oint_{\partial D(0,1)} \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(3z^2 + 10z + 3)} dz \\ &= -\frac{1}{2i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(z + 3)(3z + 1)} dz \end{aligned}$$

Notamos que las singularidades del integrando son $z = -3$, $z = 0$ y $z = -1/3$. Debemos considerar sólo $z = 0$ y $z = -1/3$, ya que son aquellas con módulo menor a 1. Más aún, notamos que $z = 0$ es polo de orden 2 mientras que $z = -1/3$ es polo simple. En efecto,

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z^2 - 1)^2}{(z + 3)(3z + 1)} = \frac{1}{3} \neq 0$$

y

$$\lim_{z \rightarrow -1/3} (z + 1/3) f(z) = \lim_{z \rightarrow -1/3} \frac{(z^2 - 1)^2}{3z^2(z + 3)} = \frac{(8/9)^2}{8/9} = \frac{8}{9} \neq 0.$$

Los residuos correspondientes están dados por

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{3z^2 + 10z + 3} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(4z^3 - 4z)(3z^2 + 10z + 3) - (z^4 - 2z^2 + 1)(6z + 10)}{(3z^2 + 10z + 3)^2} = -\frac{10}{9} \end{aligned}$$

y

$$\operatorname{Res}(f, -1/3) = \frac{8}{9}.$$

Así, en virtud del teorema de los residuos, tendremos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{5 + 3 \operatorname{cos}(\theta)} d\theta = -\frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \left(\frac{8}{9} - \frac{10}{9} \right) = \frac{2\pi}{9}$$

P2. Considere la función $f(x) = \cosh(ax)$ para $a > 0$.

(a) Notamos que f es una función par, por lo tanto se tendrá automáticamente que

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx = 0 \quad , \forall k \geq 1$$

Por otra parte, tenemos que

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{cos}(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh(ax) \operatorname{cos}(kx) dx.$$

Llamemos I_k a esta última integral. Luego, integrando por partes con $u = \cos(kx)$ y $v = \sinh(ax)/a$ tendremos que

$$\begin{aligned} I_k &= \left(\frac{\sinh(ax) \cos(kx)}{a} \right) \Big|_0^\pi + \frac{k}{a} \int_0^\pi \sinh(ax) \sin(kx) dx \\ &= \frac{\sinh(a\pi)(-1)^k}{a} + \frac{k}{a} \int_0^\pi \sinh(ax) \sin(kx) dx. \end{aligned}$$

Haciendo nuevamente integración por partes en esta última integral, ahora con $u = \sin(kx)$ y $v = \cosh(ax)/a$ tendremos que

$$\begin{aligned} &= \frac{\sinh(a\pi)(-1)^k}{a} + \frac{k}{a} \left(\left(\frac{\cosh(ax) \sin(kx)}{a} \right) \Big|_0^\pi - \frac{k}{a} \int_0^\pi \cosh(ax) \cos(kx) dx \right) \\ &= \frac{\sinh(a\pi)(-1)^k}{a} - \frac{k^2}{a^2} I_k. \end{aligned}$$

De aquí, se desprende que

$$\frac{a^2 + k^2}{a^2} I_k = \frac{\sinh(a\pi)(-1)^k}{a} \iff I_k = \frac{a \sinh(a\pi)(-1)^k}{a^2 + k^2}.$$

Por lo tanto, como este desarrollo es válido para todo $k \geq 0$

$$a_k = \frac{2a \sinh(a\pi)(-1)^k}{\pi(a^2 + k^2)}, \quad \forall k \geq 0.$$

Como la función f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $[-\pi, \pi]$ y además $f(-\pi) = f(\pi)$, tenemos finalmente que

$$\begin{aligned} \cosh(ax) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) = \frac{\sinh(a\pi)}{a\pi} + \frac{2a \sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 + k^2} \cos(kx) \\ &= \frac{\sinh(a\pi)}{a\pi} \left(1 + 2a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 + k^2} \cos(kx) \right). \end{aligned}$$

(b) De la parte anterior, tomando $a = 1$ y evaluando en $x = \pi$ tendremos que

$$\cosh(\pi) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + k^2} \right).$$

Despejando la serie de esta última igualdad, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + k^2} = \frac{\pi \operatorname{cotgh}(\pi) - 1}{2}.$$

De manera análoga, tomando $a = 1$ y evaluando en $x = 0$ tendremos que

$$1 = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + k^2} \right) = \frac{2 \sinh(\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + k^2} \right),$$

de donde se desprende que

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + k^2} = \frac{\pi}{2 \sinh(\pi)}.$$

P3. (a) Los coeficientes de la serie pedida vienen dados por

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \operatorname{sen}(kx) dx.$$

Integrando por partes, con $u = x$ y $v = -\cos(kx)/k$ tendremos que

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi} \left(\left(-\frac{x \cos(kx)}{k} \right) \Big|_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos(kx) dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi(-1)^k}{k} + \frac{1}{k} \left(\frac{\operatorname{sen}(kx)}{k} \right) \Big|_0^\pi \right) \\ &= \frac{2(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

Así, para $x \in (0, \pi)$ se tiene que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}(kx)$$

(b) Considere el problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + 6u_x &= 0 & , & \quad x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) &= 0 & , & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= e^{3x} & , & \quad x \in (0, \pi) \end{aligned}$$

i) Supongamos que $u(x, t) = X(x)T(t)$ es una solución no nula de la ecuación. Reemplazando en esta, tendremos que

$$XT' - X''T + 6X'T = 0 \iff XT' = X''T - 6X'T \iff \frac{T'}{T} = \frac{X'' - 6X'}{X},$$

donde esta última división es válida, ya que buscamos soluciones no nulas. Luego, dichos cocientes son constantes, de donde tendremos que

$$T' - \lambda T = 0 \quad \text{y} \quad X'' - 6X' - \lambda X = 0.$$

De las condiciones $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ para $t > 0$, tendremos que $X(0) = X(\pi) = 0$, ya que buscamos soluciones no triviales. Para la segunda ecuación, notemos que el polinomio característico viene dado por

$$p(\alpha) = \alpha^2 - 6\alpha - \lambda,$$

cuyas raíces vienen dadas por

$$\alpha_{\pm} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4\lambda}}{2} = 3 \pm \sqrt{9 + \lambda}.$$

Con esto, llamando $\beta = \sqrt{9 + \lambda}$ tenemos que

$$X(x) = \begin{cases} e^{3x}(Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}) & , \quad \lambda \neq -9 \\ e^{3x}(A + Bx) & , \quad \lambda = -9 \end{cases}.$$

Imponiendo la condición $X(0) = 0$ tendremos que

$$\begin{aligned} A &= -B & , & \quad \lambda \neq -9 \\ A &= 0 & , & \quad \lambda = -9 \end{aligned}$$

es decir

$$X(x) = \begin{cases} Ae^{3x}(e^{\beta x} - e^{-\beta x}) & , \quad \lambda \neq -9 \\ Bxe^{3x} & , \quad \lambda = -9 \end{cases}.$$

Imponiendo ahora la condición $X(\pi) = 0$, obtenemos que (recordando que buscamos soluciones no triviales)

$$\begin{aligned} e^{2\beta\pi} &= 1 & , & \quad \lambda \neq -9 \\ B &= 0 & , & \quad \lambda = -9 \end{aligned}$$

Vemos así que para $\lambda = -9$ tenemos sólo la solución trivial. Además, tendremos que

$$2\beta\pi = 2k\pi i \iff \beta = ki \iff 9 + \lambda = -k^2 \iff \lambda = -(k^2 + 9)$$

para $k \geq 1$. Así,

$$X_k(x) = Ae^{3x}(e^{\beta x} - e^{-\beta x}) = \tilde{A}e^{3x} \operatorname{sen}(kx) \quad , \forall k \geq 1.$$

Además, para estos valores de λ , tendremos que

$$T'_k + (k^2 + 9)T_k = 0 \iff T_k(t) = Ce^{-(k^2+9)t}.$$

Finalmente, y obviando las constantes, tendremos que las soluciones elementales de este problema son de la forma

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = e^{3x} \operatorname{sen}(kx) \cdot e^{-(k^2+9)t} = e^{-(k^2+9)t+3x} \operatorname{sen}(kx).$$

ii) Usando el principio de superposición, consideremos ahora

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-(k^2+9)t+3x} \operatorname{sen}(kx).$$

Imponiendo la condición $u(x, 0) = e^{3x}x$ para $x \in (0, \pi)$, tendremos que

$$e^{3x}x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{3x} \operatorname{sen}(kx).$$

Por lo tanto, buscamos coeficientes c_k tales que para $x \in (0, \pi)$ se tenga

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}(kx) = x.$$

De la parte **(a)**, tenemos que basta con considerar

$$c_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}.$$

Así, la solución del problema viene dada por

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} e^{-(k^2+9)t+3x} \operatorname{sen}(kx).$$