Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
5 de Enero de 2018

Control N°2 MA2002

Profesor: Gonzalo Flores G.
Auxiliar: Nicolás Zalduendo V.

P1. **(a)** (3 ptos.) Determine en qué puntos del plano complejo son derivables las siguientes funciones (donde $z = x + iy$) y calcule sus derivadas donde éstas existan.

i) $f(z) = e^x(\cos(y) - i\,\mathrm{sen}(y))$.

ii) $g(z) = (z - i)\overline{z}$.

(b) (3 ptos.) Suponga que $u(x, y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ corresponde a la parte real de una función holomorfa $h(z)$. Encuentre la parte imaginaria $v(x, y)$ sabiendo que $h(i) = e^{-1}$.

P2. **(a)** (3 ptos.) Considere la función

$$f(z) = \frac{z + 1}{z(4 - z)}.$$

Encuentre una serie de potencias para f en torno a $a = 2$, indicando su radio de convergencia.
Indicación: Puede serle útil descomponer en fracciones parciales.

(b) (3 ptos.) Sea $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $g''(z) = 2g(z) + 1$, con $g(0) = 1$ y $g'(0) = 0$. Encuentre la serie de potencias de g en torno a 0 y determine su radio de convergencia.

P3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa.

(a) (2 ptos.) Dado $\alpha \in (0, 2\pi)$, pruebe que si

$$\lim_{R\to\infty} R\int_0^\alpha |f(Re^{i\theta})|d\theta = 0,$$

entonces se tiene que

$$e^{i\alpha}\int_0^\infty f(e^{i\alpha}x)dx = \int_0^\infty f(x)dx.$$

Indicación: Considere el borde del sector circular de ángulo α.

(b) (2 ptos.) Pruebe que la función $f(z) = e^{-z^2}$ satisface la condición anterior para todo $\alpha \in (0, \pi/4)$.

(c) (2 ptos.) Sabiendo que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, calcule el valor de las integrales impropias

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(x^2)dx \quad \text{y} \quad \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{sen}(x^2)dx.$$

Indicación: Recuerde que

$$\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}(\pi/8) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Tiempo: 3 horas