Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
22 de Diciembre de 2017

Pauta Control N°1 MA2002

Profesor: Gonzalo Flores G.
Auxiliar: Nicolás Zalduendo V.

P1. **(a)** Notamos que

$$h_1 \nabla h_2 = \left(h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x}, h_1 \frac{\partial h_2}{\partial y}, h_1 \frac{\partial h_2}{\partial z} \right).$$

Así, la divergencia de este producto está dada por

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(h_1 \nabla h_2) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1 \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h_1 \frac{\partial h_2}{\partial z} \right) \\
&= \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\frac{\partial h_2}{\partial x} + h_1 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial h_2}{\partial y} + h_1 \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial h_1}{\partial z}\frac{\partial h_2}{\partial z} + h_1 \frac{\partial^2 h_2}{\partial z^2} \right) \\
&= h_1 \left(\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{\partial h_1}{\partial z}\frac{\partial h_2}{\partial z} \right) \\
&= h_1 \Delta h_2 + \nabla h_1 \cdot \nabla h_2,
\end{aligned}$$

la cual es la igualdad pedida.

(b) Notamos primero que la igualdad solicitada equivale a

$$\iint_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\Omega} f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g dV,$$

donde hemos usado la definición de la derivada normal. Procederemos usando el teorema de la divergencia para el campo vectorial $f\nabla g$. Para ello requerimos que

- Ω sea un abierto acotado cuya superficie $\partial\Omega$ sea regular por pedazos y orientada con respecto a su normal exterior: Esto se tiene directo del enunciado, ya que la condición de que $\partial\Omega$ es cerrado equivale a que Ω es acotado.
- $f\nabla g$ sea de clase $\mathcal{C}^1$ en el abierto $\mathcal{U}$, y que este último contenga a $\Omega \cup \partial\Omega$: El campo $f\nabla g$ es de clase $\mathcal{C}^1$, ya que f y g son de clase $\mathcal{C}^2$. Luego, f y ∇g son, en particular, de clase $\mathcal{C}^1$, por lo que su producto también lo es. El resto se desprende directamente del enunciado.

Con lo anterior y usando la parte **(a)**, tendremos que

$$\iint_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(f \nabla g) dV = \iiint_{\Omega} f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g dV,$$

de donde se concluye lo pedido por la equivalencia mencionada al comienzo del desarrollo.

(c) Notamos que en la parte anterior sólo necesitábamos que f fuese de clase $\mathcal{C}^1$ y que g fuese de clase $\mathcal{C}^2$ como condiciones de regularidad. Notando que ambas funciones son de clase $\mathcal{C}^2$, podemos intercambiar los roles de f y g, obteniendo así las igualdades

$$\iiint_{\Omega} f \Delta g dV = \iint_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dV$$

y

$$\iiint_{\Omega} g \Delta f dV = \iint_{\partial\Omega} g \frac{\partial f}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla f dV.$$

Restando ambas igualdades y agrupando adecuadamente deducimos que

$$\iiint_{\Omega}(f\Delta g - g\Delta f)dV = \iint_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)dS - \iiint_{\Omega}(\nabla f\cdot\nabla g - \nabla g\cdot\nabla f)dV.$$

Recordando que el producto punto es simétrico, tendremos que $\nabla f\cdot\nabla g - \nabla g\cdot\nabla f \equiv 0$ en $\mathcal{U}$, con lo que su integral sobre Ω es igual a cero. Con esto, se tiene finalmente que

$$\iiint_{\Omega}(f\Delta g - g\Delta f)dV = \iint_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)dS,$$

que es exactamente el resultado buscado.

P2. **(a)** Tenemos que Γ viene dada por la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Juntando ambas ecuaciones, tenemos que Γ satisface $z^2 + z - 2 = 0$, es decir

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}.$$

Como además $z = x^2 + y^2 \geq 0$, se tendrá entonces que la curva está dada por

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \wedge \quad z = 1,$$

es decir, una circunferencia de radio 1, paralela al plano XY a una altura $z = 1$.

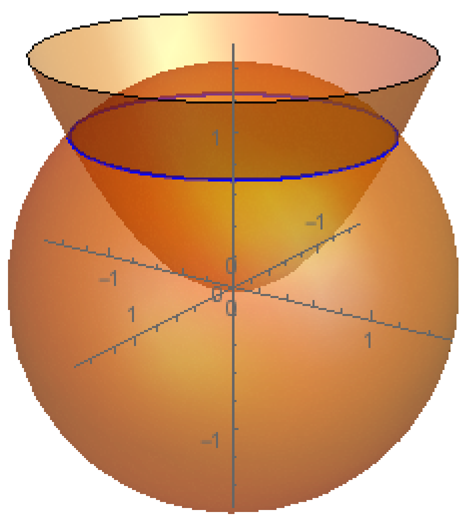

Figure 1: Bosquejo de la curva Γ

(b) Al ser Γ una circunferencia paralela al plano XY a altura $z = 1$, podemos parametrizarla en coordenadas cilíndricas mediante

$$\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 1) = \hat{\rho} + \hat{k}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

la cual se encuentra recorrida en el sentido antihorario del plano XY. En particular, tendremos que

$$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0) = \hat{\theta}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Usando esto, tenemos que

$$\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(\cos^2(t) + 1, \operatorname{sen}^2(t) + \cos(t), 1 + \operatorname{sen}(t))\cdot(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}(t)\cos^2(t) - \operatorname{sen}(t) + \cos(t)\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)dt = \pi.$$

Observación: Otra alternativa es notar que el campo es de clase $\mathcal{C}^1$ y la curva puede ser interpolada, por ejemplo, por el círculo de radio 1 paralelo al plano XY y a altura $z = 1$, orientado este último por la normal consistente con el sentido de giro de la curva. Así, se puede obtener la integral usando el teorema de Stokes.

(c) En coordenadas cilíndricas, tenemos que

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\theta} & \hat{k} \\ \partial_\rho & \partial_\theta & \partial_z \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0.$$

Por otra parte, recordando que $\gamma(t) = \hat{\rho} + \hat{k}$ y $\gamma'(t) = \hat{\theta}$, tendremos que $\vec{F}(\gamma(t)) = \hat{\theta} + \hat{k}$. Así

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\hat{\theta} + \hat{k})\cdot\hat{\theta}dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

donde hemos usado que $\hat{\theta}$ y $\hat{k}$ son ortogonales y de norma 1. Esto último no contradice el teorema de Stokes, ya que la curva Γ encierra al eje Z, con lo que cualquier superficie que la tenga como borde intersectará dicho borde. Luego, no se cumple la hipótesis de que el campo sea de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto que contenga a la superficie y la curva, ya que el campo está incluso indefinido en el eje Z.

P3. (a) Notamos primero que ambos campos están bien definidos y son de clase $\mathcal{C}^1$ sobre todo $\mathbb{R}^3$. En este caso, ser conservativo equivale a ser irrotacional. Calculemos los rotores de estos campos.

$$\operatorname{rot}(\vec{F}_1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{y}{z^2+4} & \frac{x}{z^2+4} & -\frac{2xyz}{z^4+8z^2+16} \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\frac{2xz}{z^4+8z^2+16} + \frac{2xz}{(z^2+4)^2}\right)\hat{i} + \left(-\frac{2yz}{(z^2+4)^2} + \frac{2yz}{z^4+8z^2+16}\right)\hat{j} + \left(\frac{1}{z^2+4} - \frac{1}{z^2+4}\right)\hat{k},$$

pero $(z^2+4)^2 = z^4 + 8z^2 + 16$, con lo que se concluye que $\operatorname{rot}(\vec{F}_1) = 0$. Por otra parte, para $\vec{F}_2$ tenemos que

$$\operatorname{rot}(\vec{F}_2) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 & x & x \end{vmatrix} = -\hat{j} + (1-2y)\hat{k}.$$

Por lo tanto, sólo $\vec{F}_1$ es conservativo. Busquemos un potencial para $\vec{F}_1$ de manera que $\vec{F}_1 = \nabla g$. Necesitamos que g verifique las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{y}{z^2+4} && (1) \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{x}{z^2+4} && (2) \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= -\frac{2xyz}{z^4+8z^2+16} && (3) \end{aligned}$$

De (1) deducimos que

$$g(x,y,z) = \frac{xy}{z^2+4} + c(y,z),$$

con lo que

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{z^2+4} + \frac{\partial c}{\partial y}.$$

Juntando esto último con (2), deducimos que

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 0$$

de donde $c(x, y) = d(z)$. Luego,

$$g(x, y, z) = \frac{xy}{z^2+4} + d(z).$$

De esto último

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{2xyz}{(z^2+4)^2} + d'(z) = -\frac{2xyz}{z^4+8z^2+16} + d'(z).$$

Uniendo esto con (3) se deduce que $d'(z) = 0$, es decir $d(z) = C$, para algún $C \in \mathbb{R}$. Así, tendremos finalmente que

$$g(x, y, z) = \frac{xy}{z^2+4} + C$$

es un potencial para $\vec{F}_1$, para cualquier constante $C \in \mathbb{R}$.

Observación: También es válido buscar el potencial de manera que $\vec{F}_1 = -\nabla g$.

(b) (3 ptos.) Calcule

$$\int_C (F_1 + F_2) \cdot d\vec{r},$$

donde la curva C es la parte con $z \leq 0$ de la elipse que resulta de intersectar el manto cilíndrico $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $y = z$, recorrida desde $(1, 0, 0)$ a $(-1, 0, 0)$.

Notamos que para el cálculo pedido, basta con calcular las integrales de trabajo de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ por separado. Para la primera, usamos el hecho de que $\vec{F}_1$ es conservativo. Más precisamente, que

$$\int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = g(-1, 0, 0) - g(1, 0, 0) = 0,$$

ya que el potencial obtenido en la parte anterior vale C en ambos puntos. Para $\vec{F}_2$, recordemos que dicho campo es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$ y que la superficie S definida por $x^2 + y^2 \leq 1$, $y = z$ y $z \leq 0$ es regular y orientable, y su borde es $C \cup \Gamma$, donde Γ es el segmento de recta que une $(-1, 0, 0)$ con $(1, 0, 0)$. Para verificar que la superficie es regular y orientable, vemos que una parametrización para ella viene dada por

$$\varphi(u, v) = (u\cos(v), -u\,\mathrm{sen}(v), -u\,\mathrm{sen}(v)), \quad u \in [0, 1], v \in [0, \pi],$$

de donde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos(v) & -\mathrm{sen}(v) & -\mathrm{sen}(v) \\ -u\,\mathrm{sen}(v) & -\cos(v) & -\cos(v) \end{vmatrix} = (0, u, -u).$$

Además, la orientación dada por este vector coincide con la orientación de C. Luego, usando el teorema de Stokes tenemos que

$$\oint_{\partial S} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}(\vec{F}_2) \cdot \hat{n} dS$$

es decir

$$
\begin{aligned}
\int_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \int_\Gamma \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \int_0^\pi (0,-1,1+2u\,\mathrm{sen}(v)) \cdot (0,u,-u) dv du \\
&= \int_0^1 \int_0^\pi -2u - 2u^2\,\mathrm{sen}(v) dv du = -\pi - \frac{4}{3},
\end{aligned}
$$

pero para Γ podemos tomar la parametrización $\gamma(t) = (t,0,0)$, con $t \in [-1,1]$, con lo que

$$
\int_\Gamma \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 (0,t,t) \cdot (1,0,0) dt = 0.
$$

Así, obtenemos que

$$
\int_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = -\pi - \frac{4}{3},
$$

y en consecuencia

$$
\int_C (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot d\vec{r} = -\pi - \frac{4}{3}.
$$

Observación: También es válido calcular las integrales de linea directamente.