Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
22 de Diciembre de 2017

Control N°1 MA2002

Profesor: Gonzalo Flores G.
Auxiliar: Nicolás Zalduendo V.

P1. Sean f y g dos campos escalares de clase $\mathcal{C}^2$ definidos sobre un abierto no vacío $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$. Sea además $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto cuya superficie $\partial\Omega$ es cerrada, regular por pedazos y orientada según su normal exterior $\hat{n}$. Suponemos además que $\Omega \cup \partial\Omega \subseteq \mathcal{U}$. El objetivo de esta pregunta es demostrar la fórmula integral de Green

$$\iiint_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)dV = \iint_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) dS,$$

donde $\dfrac{\partial h}{\partial n} = \nabla h \cdot \hat{n}$ denota la derivada normal. Para esto, proceda como sigue

(a) (2 ptos.) Demuestre que $\text{div}(h_1 \nabla h_2) = h_1 \Delta h_2 + \nabla h_1 \cdot \nabla h_2$ cuando h_1 y h_2 son de clase $\mathcal{C}^1$ y $\mathcal{C}^2$, respectivamente.

(b) (2 ptos.) Use adecuadamente lo anterior para probar que

$$\iiint_\Omega f\Delta g dV = \iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial n} dS - \iiint_\Omega \nabla f \cdot \nabla g dV.$$

(c) (2 ptos.) Usando lo anterior, concluya el resultado pedido.

P2. Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar las superficies $z = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

(a) (1 pto.) Bosqueje las superficies y la curva Γ, justificando las relaciones que permitan deducir dichos bosquejos.

(b) (2 ptos.) Calcule la integral de trabajo del campo $\vec{F} = (x^2 + z)\hat{\imath} + (y^2 + x)\hat{\jmath} + (z^2 + y)\hat{k}$ a lo largo de Γ, especificando la orientación escogida para dicha curva.

(c) (3 ptos.) Sea $\vec{F} = \dfrac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$ (en coordenadas cilíndricas). Pruebe que $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ para $\rho > 0$, pero que sin embargo $\displaystyle\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción con el teorema de Stokes.

P3. **(a)** (3 ptos.) Determine cuáles de los siguientes campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ son conservativos y obtenga potenciales asociados para aquellos que lo sean.

$$\vec{F}_1 = \left(\frac{y}{z^2+4}, \frac{x}{z^2+4}, -\frac{2xyz}{z^4+8z^2+16} \right)$$
$$\vec{F}_2 = (y^2, x, x)$$

(b) (3 ptos.) Calcule

$$\int_C (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot d\vec{r},$$

donde la curva C es la parte con $z \leq 0$ de la elipse que resulta de intersectar el manto cilíndrico $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $y = z$, recorrida desde $(1, 0, 0)$ a $(-1, 0, 0)$.

Tiempo: 3 horas

Operadores diferenciales en coordenadas ortogonales: Recuerde que si $\vec{r}(u,v,w)$ es un sistema de coordenadas ortogonales, entonces se tienen las siguientes relaciones (donde $f = f(u,v,w)$ y $\vec{F} = \vec{F}(u,v,w)$ son campos escalar y vectorial descritos en dicho sistema, respectivamente)

- Gradiente:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}.$$

- Divergencia:

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(F_u h_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(h_u F_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(h_u h_v F_w\right)\right)$$

- Rotor:

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix}$$