

1 de Agosto

Temario: → Análisis Vectorial:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \text{ campos escalares.} \\ F: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \text{ campos vectoriales.} \end{aligned}$$

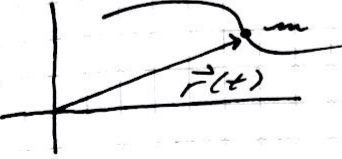
→ Análisis Complejo
 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

→ Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)
 de incógnita es $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Apuntes: • ~~CM~~ versión 2009.

- Marsden y Tromba (para la 1ª materia)
- M. Spivak - Cálculo de Variedades.

Recordemos Parametrización:



$\vec{r}_1(\text{posición}): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n, n \in \{2, 3\}$
 $\vec{v}_1$ es velocidad
 $\vec{a}_1$ es aceleración
 Codo en función del tiempo.

De existir n partículas, se puede definir el conjunto de las posición de todas como una función:

$$\vec{r}: \{1, 2, \dots, n\} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Y así obtener su velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$.

De extenderlo a un medio continuo (una zona del espacio donde cada punto es de "acumulación", o está incluido), pero la complicación de esto es la manera de identificar cada



$\Omega(t)$ partícula en su trayectoria.

Una solución es crear una función que me diga cada (pequeño) lugar de la partícula:

Así, tenemos: $\gamma_0: \Omega_0 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$

Luego $\gamma_0(x_0, t)$ sería la posición de x_0 en $t=0$, en la trayectoria $\gamma(x_0, \cdot)$.

Luego, en un instante $t > 0$ fijo, se tiene que

$$\vec{v}(x_0) = \frac{\partial \gamma}{\partial t}(x_0, t), \text{ un vector velocidad para cada partícula en } t.$$

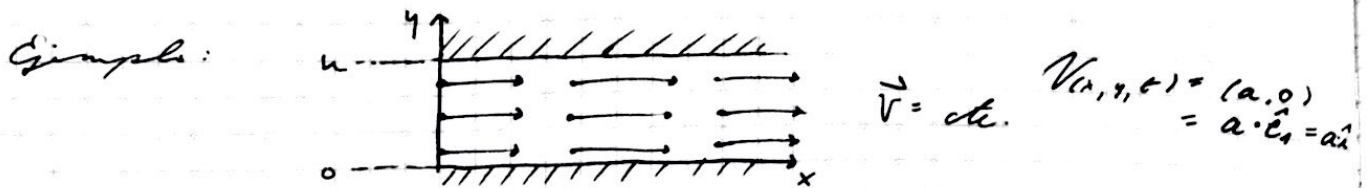
∴ $\vec{v}$ es un campo vectorial de las velocidades del medio.

$\gamma(x_0, t)$ es la descripción Lagrangiana del medio. (también puede obtener la velocidad del medio).

O sea, $\vec{v}(x, t)$ es la velocidad en t de la partícula en la posición x . A esto se le llama descripción Euleriana del campo de velocidades.

V_L (velocidad lagrangiana): $\Omega_0 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $(x_0, t) \mapsto V_L(x_0, t)$

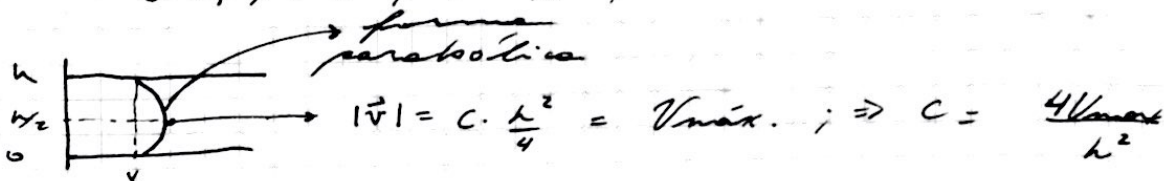
V_E (velocidad de Euler): $\Omega(t) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $(x, t) \mapsto V_E(x, t)$



Ejemplo más realista: $\vec{V}_E$: Condición de adherencia en las paredes: $V=0$.

El caso más simple: $\vec{V}(x, y, t) = (g(y), 0)$

$g(y) = c \cdot y \cdot (h-y)$, con $c \in \mathbb{R}$.

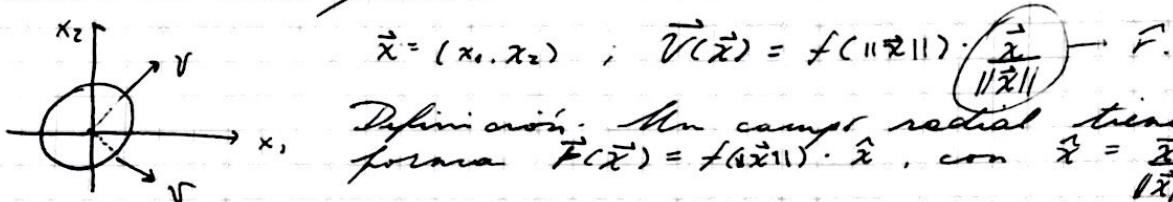


$\vec{V}(x, y, t) = \frac{4V_{max}}{h^2} y(h-y) \vec{e}_1$

En un cilindro: } Campo Vectorial ($\vec{F}$)

Los campos en genl. son de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
 De manera más general: $\vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, lo cual gráficamente es una colección de flechas en un espacio.

Ejemplo 2: Campo de Velocidades en líquidos inyectados en un punto.



Definición: Un campo radial tiene la forma $\vec{F}(\vec{x}) = f(\|\vec{x}\|) \cdot \hat{x}$, con $\hat{x} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$.

Siendo este líquido entrando a un punto.

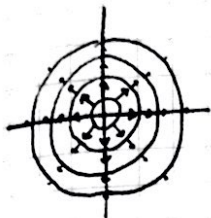
Caso Particular: Caudal constante de entrada.

"Q unidades de volumen" (masa) por unidad de tiempo.

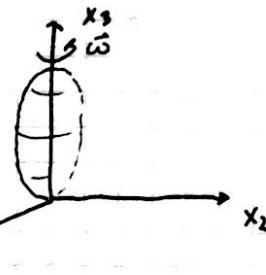
En $\mathbb{R}^3$, el volumen está dado por $V(t) = \frac{4}{3} \pi R(t)^3$
 Para $V'(t) = Q \Rightarrow V(t) = Qt + C$
 $\Rightarrow \frac{4}{3} \cdot 3 R(t)^2 \cdot R'(t) = 4 R(t)^2 \cdot R'(t) = F(t) = F(x)$

Y así $\|\vec{V}(x)\| = f(\|\vec{x}\|) = \frac{Q}{4\pi R(t)} = \frac{Q}{4\pi \|\vec{x}\|^2} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = \vec{V}(x)$

¿Cómo quedaría el campo?

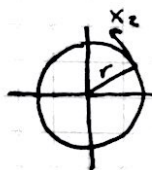


Ejemplo 3: Rotación de un sólido con respecto a un eje fijo a velocidad de rotación constante.



Visto desde arriba:

Donde el periodo de giro es $\frac{2\pi}{\omega}$.



$$(x_1(t), x_2(t), x_3) = r(t)$$

$$x_1 = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t), x_3)$$

$$v(t) = r'(t) = r\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0)$$

El campo de velocidades vendría dado por:

$$\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = \vec{V}'(t) = \omega(-x_2, x_1, 0) \text{ ¡ojo! Nota que es } \perp \text{ a } \vec{x}.$$

Clásico Producto Cruz:

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{K} \times \hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

} tipo del prope.

$$\therefore \vec{V} = \omega \hat{K} \times \vec{x} = \vec{\omega} \times \vec{x}.$$

Producto Punto / Producto Cruz: Pasa cosas en común.
 $P: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $C: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Tanto P como C (funciones) son bi-lineales.

¿Qué significa que sean bilineales? Significa que son lineales (oh vaya): m es bilineal si:
 $b(\cdot, y)$ es lineal (o sea $x+y \in \text{Dom } b$)
 $b(x, \cdot)$ es lineal (o sea $\lambda x \in \text{Dom } b$)

Esquema: Para saber si b es bilineal, basta con conocer $b(\hat{e}_i, \hat{e}_j)$ en alguna base $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$.

$$\text{Demostración: } b(\vec{u}, \vec{v}) = b\left(\sum u_j \hat{e}_j, \sum v_k \hat{e}_k\right) = \sum_j \sum_k u_j v_k b(\hat{e}_j, \hat{e}_k)$$

Como P = producto interno.

$$\text{Base Canónica: } P(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

En $\mathbb{R}^3$ le llamaremos a δ_{ij} delta de Kronecker

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n u_i v_k \delta_{ik}, \text{ pero si } i \neq k, = 0.$$

$$= \sum_{i=1}^n u_i v_i \delta_{ii} \quad \text{* Imaginemos que } n=3.$$

$$= \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad \text{\{ Clásico Producto Punto.}$$

¿Más bonito? $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_j v_j$ \{ Convención de Einstein

$$\text{Ejemplo: } 1. A x = [A_{ij}] [x_j]; \quad (A x)_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} x_j = A_{ij} x_j$$

$$2. (I x)_i = \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} x_j = x_i$$

Conservación
Einstein

Propiedades del Producto Cruz:

1° Es Antisimétrico: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
 $\vec{u} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

2° Para las bases:
$$\left. \begin{aligned} \hat{e}_1 \times \hat{e}_1 &= \vec{0} \\ \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 &= \hat{e}_3 \\ \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 &= \hat{e}_1 \\ \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 &= \hat{e}_2 \end{aligned} \right\} \text{Clásicos caso } \vec{r}, \vec{p}, \vec{h} \text{ de mecánica.}$$

Formalmente:
$$\vec{u} \times \vec{v} = \sum_{j=1}^3 u_j \hat{e}_j \times \sum_{k=1}^3 v_k \hat{e}_k$$

$$= \sum_i \sum_k u_i v_k (\hat{e}_i \times \hat{e}_k)$$

Luego los físicos crearon una notación:

Def:
$$\epsilon_{ijk} = (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_k = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$$

Propiedades: $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$
 $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}; \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}; \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{kji}$
 (antisimétricos)

$$(\vec{u} \times \vec{v})_k = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \hat{e}_k$$

la componente k del vector:
$$= (\sum_i \sum_j u_i v_j (\hat{e}_i \times \hat{e}_j)) \cdot \hat{e}_k$$

$$= \sum_i \sum_j u_i v_j \epsilon_{ijk} \quad \text{si lo escribimos.}$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k u_i v_j \epsilon_{ijk}$$

$$= \epsilon_{ijk} u_i v_j \hat{e}_k \quad \text{notación gla de Einstein}$$

si:
$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{123} &= -\epsilon_{312} = -1 \\ \epsilon_{132} &= -\epsilon_{231} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ solo 6 de los } \epsilon_{ijk} \text{ son distintos de 0.}$$

si $(\vec{a} \times \vec{b})_k = \epsilon_{ijk} \cdot a_i b_j$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_1 = \epsilon_{231} \cdot a_2 b_3 + \epsilon_{321} a_3 b_2$$

$$= a_2 b_3 - a_3 b_2$$

¿Por qué?
$$\epsilon_{ijk} = (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_k$$

$$\epsilon_{123} = (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) \cdot \hat{e}_3$$

$$= \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = 1$$

Ejercicio:
$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$$

Dimostración: El profe lo subió.

Ejercicio: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ (no es asociativo)

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \epsilon_{ijk} (\vec{a} \times \vec{b})_i \cdot c_j \vec{e}_k \quad (\text{ordenando la } \Sigma) \\
 &= \epsilon_{ijk} (\epsilon_{mni} a_m \cdot b_n) \cdot c_j \vec{e}_k \\
 &= -\epsilon_{kji} \epsilon_{mni} a_m b_n c_j \vec{e}_k \\
 &= -(\delta_{km} \delta_{jn} - \delta_{jm} \delta_{kn}) a_m b_n c_j \vec{e}_k \\
 &= (\delta_{jm} \delta_{kn} a_m b_n c_j - \delta_{km} \delta_{jn} a_m b_n c_j) \vec{e}_k
 \end{aligned}$$

Se eliminan los términos distintos:

$$\begin{aligned}
 \text{Se impone } k=m: \\
 &= (\delta_{jm} \delta_{jn} a_m b_n c_j - \delta_{jm} \delta_{jn} a_m b_n c_j) \vec{e}_k \\
 &= (1 \cdot \delta_{jn} a_m b_n c_j - \delta_{jm} \delta_{jn} 1 \cdot a_m b_n c_j) \vec{e}_k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Se impone } j=n: \quad (a) \quad (b) \\
 &= (\delta_{jm} a_m b_n c_j - \delta_{jm} a_m b_n c_j) \vec{e}_k \quad \text{la parte} \\
 &= (1 \cdot a_j b_k c_j - \delta_{jm} a_m b_n c_j) \vec{e}_k \quad \text{b se hace}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Se impone } k=n: \\
 &= (a_j b_k c_j - a_j b_k c_j) \vec{e}_k \\
 &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) b_k \vec{e}_k - (\vec{b} \cdot \vec{c}) a_k \vec{e}_k \\
 &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}
 \end{aligned}$$

ϵ_{ijk} = Ceros de Levi-Civita.

Operadores Básicos Diferenciales:

1. Gradiente grad: Campo Escalar $\longrightarrow$ Campo Vectorial

$$\begin{aligned}
 \text{grad}(f) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \vec{e}_3 \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i
 \end{aligned}$$

$$\text{Notación: } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

Así, el grad $f = \nabla f$.

2. Divergencia div: Campo Vectorial $\longrightarrow$ Campo Escalar
 $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \longrightarrow \text{div } \vec{F}$

$$\begin{aligned}
 \text{div } \vec{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \\
 &= \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \\
 &= \nabla \cdot \vec{F}
 \end{aligned}$$

Para definir div. se requiere $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $\vec{x} \longmapsto \vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), F_3(\vec{x}))$
 $\exists \vec{F}$ debe admitir ser C^1 (clase)

Así, div $\vec{F}$ se puede calcular en la parte de dom($\vec{F}$) donde $\vec{F}$ es (continua) derivable.

Ejemplo: Fuente puntual de fluido incompresible:

$$\vec{V}(\vec{x}) = C \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, \quad \text{donde } \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{C x_i}{\|\vec{x}\|^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Luego } \frac{\partial V_i}{\partial x_i} &= C \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}^3} \right) = C \cdot \frac{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}^3 - x_i \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot 2x_i \right)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \\
 &= C \cdot \left(\frac{\|\vec{x}\|^3 - 3x_i^2 \|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|^6} \right) = C \|\vec{x}\| \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_i^2}{\|\vec{x}\|^6} \right)
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \sum \frac{C \cdot \|x\|}{\|x\|^6} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_i^2)$$

$$= 0 \dots$$

si
 $\therefore \operatorname{div}(\vec{V}) = 0$; entonces, es incompresible y mantiene su volumen.

3. Rotos: $\operatorname{rot}: \text{Campo Vectorial} \longrightarrow \text{Campo Vectorial}$
 $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F}$
 $= \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \vec{e}_k$

Min: $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$

$$\vec{V} \text{ de sólido rotatorio} = \vec{\omega} \times \vec{x}$$

$$= \omega \vec{k} \times \vec{x}$$

$$= \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\therefore \operatorname{rot}(\vec{V}) = \nabla \times \vec{V} = (0, 0, 2\omega) = \omega(0, 0, 2) = 2\vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot}(\vec{V})$$

5 de Agosto

Apunte:

Capítulo 1 Elementos del Cálculo Vectorial

1.1 Campos Escalares y Vectoriales:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto no vacío de $\mathbb{R}^3$. Llamaremos campo ~~escalar~~ escalar sobre Ω a la función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se define también su gráfico: $G(f) = \{\vec{x}, f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
 Su conjunto de nivel α ($\alpha \in \mathbb{R}$) de f como $N_\alpha(f) = \{\vec{x} \in \Omega \mid f(\vec{x}) = \alpha\}$.
 Este último puede ser vacío o se le conoce como superficie de nivel.

Llamaremos campo vectorial sobre Ω a toda función $\vec{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z) \hat{x} + F_2(x, y, z) \hat{y} + F_3(x, y, z) \hat{z}$.

Ejemplos: 1. Campo de Velocidades $\vec{v}(x, y, z) = -\omega y \hat{x} + \omega x \hat{y}$
 2. Fluído en tubería. (velocidad instantánea)
 3. Ley de Conducción de Fourier: $\vec{J} = -k \nabla T(x, y, z)$

Sea $\vec{F}(\vec{x}): \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 . Una línea de flujo (o de fuerza) es una curva tangente en cada punto proporcional a la dirección del campo.

1.2 Operadores Diferenciales del Cálculo Vectorial

Diferencial de $\vec{F}$ (matriz Jacobina): $J_{\vec{F}}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$

1.2.1 Divergencia, Laplaciano y Rotor:

> Divergencia: Sea $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de clase C_1 . Se define:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \operatorname{div} \vec{F} = 0 \text{ se le dice solenoidal.} \\ = \nabla \cdot \vec{F} \text{ (nabla)} \end{array} \right.$$

> Laplaciano: Sea f un campo escalar de clase C_2 . Se define el Laplaciano de f como:

$$\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Se puede definir también para un campo vectorial:

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_1 \hat{i} + \Delta F_2 \hat{j} + \Delta F_3 \hat{k}$$

> Rotor: Sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase C_1 , se define el rotor:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \nabla \times \vec{F} \end{aligned}$$

Si $\nabla \times \vec{F} = 0$, se dice que es irrotacional.

Observación: Si un campo se deriva de un ~~potencial~~ potencial, entonces $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

O sea: $\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot}(\nabla g) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right) \hat{k} = 0$ (por el teorema de Schwarz).

1.2.1 Identidades Vectoriales:

Sean $\vec{F}, \vec{G}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campos vectoriales y $f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ escalares. Se tienen las siguientes identidades:

1. $\forall c \in \mathbb{R}, \operatorname{div}(c\vec{F} + \vec{G}) = c \operatorname{div}(\vec{F}) + \operatorname{div}(\vec{G}) \rightarrow \operatorname{div}$ es lineal
2. $\forall c \in \mathbb{R}, \operatorname{rot}(c\vec{F} + \vec{G}) = c \operatorname{rot}(\vec{F}) + \operatorname{rot}(\vec{G}) \rightarrow \operatorname{rot}$ es lineal
3. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) = 0 \rightarrow$ el rotor de un campo vectorial es sol.
4. $\operatorname{rot}(\nabla f) = \vec{0} \rightarrow$ el gradiente de un c. escalar es irrotacional
5. $\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div}(\vec{F}) + \vec{F} \cdot \nabla f$
6. $\operatorname{rot}(f\vec{F}) = f \operatorname{rot}(\vec{F}) + \nabla f \times \vec{F}$
7. $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$
8. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$
9. $\Delta(fg) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \nabla f \cdot \nabla g$
10. $\nabla \cdot (f \nabla g - g \nabla f) = f \Delta g - g \Delta f$
11. $\nabla \times \vec{F} = \nabla(\operatorname{div} \vec{F}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F})$
12. $\operatorname{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F} \operatorname{div} \vec{G} - \vec{G} \operatorname{div} \vec{F} + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G}$
13. $\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} + \vec{F} \times \operatorname{rot} \vec{G} + \vec{G} \times \operatorname{rot} \vec{F}$

Notar que $(\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G} = \vec{F} \cdot (\nabla G_1) \hat{i} + \vec{F} \cdot (\nabla G_2) \hat{j} + \vec{F} \cdot (\nabla G_3) \hat{k}$.

1.3 Sistemas de Coordenadas Ortogonales:

1.3.1 Ejes Ortogonal y Factores Escalares:

Un sistema de coordenadas curvilíneas es una transformación invertible suficientemente diferenciable, con $\vec{r} = \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de modo que $(u, v, w) \in \mathcal{D}$:

$$\vec{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)).$$

Considerando además que la matriz jacobiana es

$$J^T(u, v, w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}(u, v, w) \end{bmatrix}$$

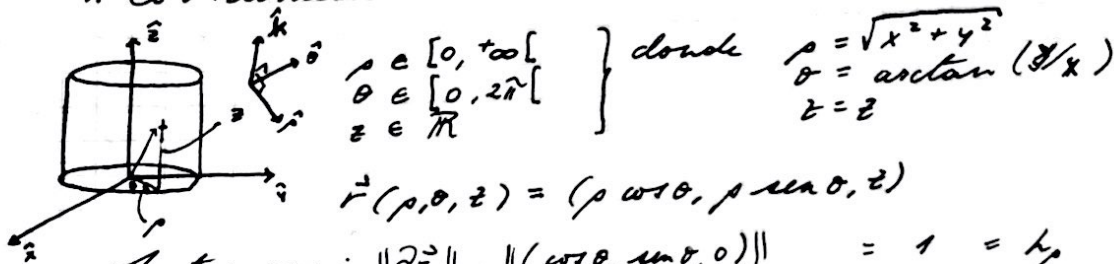
Sistema Ortogonal: Se dice que el sistema de coordenadas $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$, $(u, v, w) \in D$ es ortogonal si los vectores unitarios $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ son ortogonales.

$$\hat{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\| \quad ; \quad \hat{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \quad ; \quad \hat{w} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|$$

Además $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\| = h_u$ por notación: $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = h_u \hat{u}$.

1.3.2 Ejemplos de coordenadas:

1. Coordenadas Cilíndricas:



Notas que:

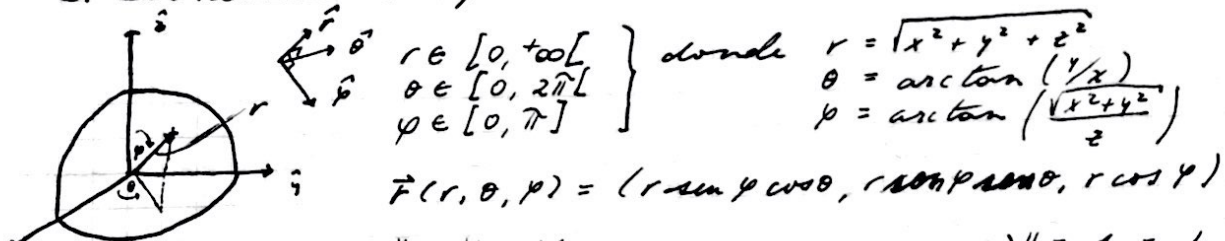
$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right\| = \left\| (\cos \theta, \sin \theta, 0) \right\| = 1 = h_\rho$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = \left\| (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0) \right\| = \rho = h_\theta$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right\| = \left\| (0, 0, 1) \right\| = 1 = h_z$$

$\hat{\rho} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$; $\hat{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$; $\hat{z} = \hat{k} = (0, 0, 1)$

2. Coordenadas Esféricas:



Notas que:

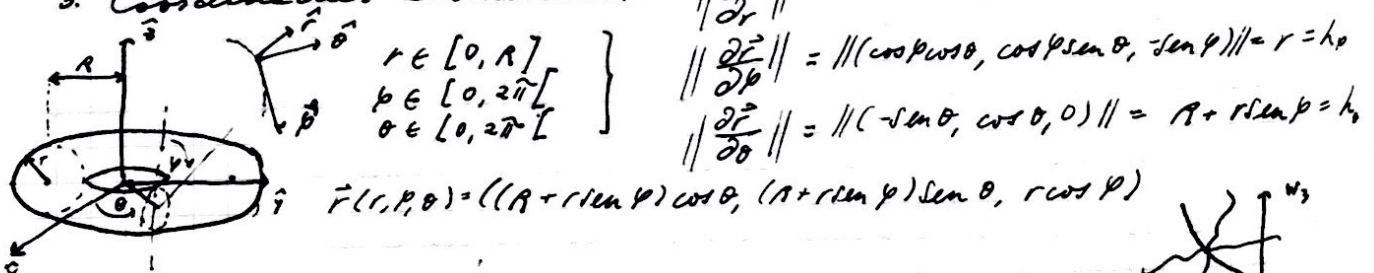
$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right\| = \left\| (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \right\| = 1 = h_r$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = \left\| (-r \sin \phi \sin \theta, r \sin \phi \cos \theta, 0) \right\| = r \sin \phi = h_\theta$$

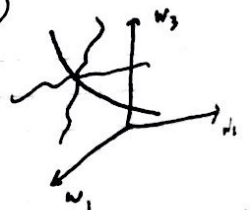
$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right\| = \left\| (r \cos \phi \cos \theta, r \cos \phi \sin \theta, -r \sin \phi) \right\| = r = h_\phi$$

$\hat{r} = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$; $\hat{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$; $\hat{\phi} = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi)$

3. Coordenadas Esféricas:



Las curvas coordenadas son obtenidas al variar solo 1 coordenada curvilínea (c.c.)



Calculus:

8 de Agosto

Gradiente: $\nabla \phi, \nabla g; \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \hat{e}_i$

Divergencia: $\nabla \cdot \vec{F}, \nabla \cdot \vec{H}; \frac{\partial H_i}{\partial x_i}$

Rotor: $\nabla \times \vec{F}, \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \hat{e}_k \quad (\nabla \times \vec{F})_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$

Laplaciano: $\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi$

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \\ &= \nabla \cdot \nabla \phi \\ &= \nabla^2 \phi. \end{aligned}$$

Nota: $\Delta \phi = \text{div}(\nabla \phi)$

Identidades:

① $\phi, \psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 : $\nabla[\phi(x)\psi(x)] = \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi$

$$\begin{aligned} \nabla(\phi\psi) &= \frac{\partial(\phi\psi)}{\partial x_i} \hat{e}_i \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi + \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) \hat{e}_i \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \psi \hat{e}_i + \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \hat{e}_i \\ &= \psi \nabla \phi + \phi \nabla \psi \end{aligned}$$

② $\text{div}(\phi \vec{F}) = \text{div}(\phi F_1, \phi F_2, \phi F_3)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi F_i) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x_i} F_i + \phi \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \\ &= \nabla \phi \cdot \vec{F} + \phi \text{div}(\vec{F}) \end{aligned}$$

③ $\text{rot}(\phi \vec{F}) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial (\phi F_j)}{\partial x_i} \hat{e}_k$ ** Importante*

$$\begin{aligned} &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} F_j \hat{e}_k + \epsilon_{ijk} \phi \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \hat{e}_k \\ &\leadsto \text{el otro: } \nabla \phi \times \vec{F} + \phi \text{rot} \vec{F}. \end{aligned}$$

④ $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \frac{\partial (\vec{F} \times \vec{G})_i}{\partial x_i}$; por $\vec{F} \times \vec{G} = \epsilon_{mni} F_m G_n \hat{e}_i$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon_{mni} F_m G_n) \\ &= \epsilon_{mni} \frac{\partial F_m}{\partial x_i} G_n + \epsilon_{mni} F_m \frac{\partial G_n}{\partial x_i} \\ &= -\epsilon_{imn} \frac{\partial F_m}{\partial x_i} G_n + \epsilon_{mni} F_m \frac{\partial G_n}{\partial x_i} \\ &= \epsilon_{imn} \frac{\partial F_m}{\partial x_i} G_n + \epsilon_{mni} F_m \frac{\partial G_n}{\partial x_i} \\ &= \underbrace{(\text{rot} \vec{F}) \cdot \vec{G}}_{\text{rot} \vec{F} \cdot \vec{G}} + \vec{F} \cdot \text{rot} \vec{G} \end{aligned}$$

$\text{rot} \vec{F} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \hat{e}_k$

Algunas derivadas. Reglas:

1) $\text{rot}(\nabla\varphi) = 0$ si φ es un campo escalar de clase C^2 .

$$\begin{aligned}\text{rot}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\vec{e}_i\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Por el teorema de Schwarz}\end{aligned}$$

Def: Si $\vec{F}$ cumple $\text{rot}\vec{F} = 0$, se dice que $\vec{F}$ es irrotacional.

Def: Si $\vec{F}$ es gradiente de algún campo escalar, se dice que $\vec{F}$ es conservativo.

Leema: Si $\vec{F}$ es conservativo y clase C^1 , entonces $\vec{F}$ es irrotacional.

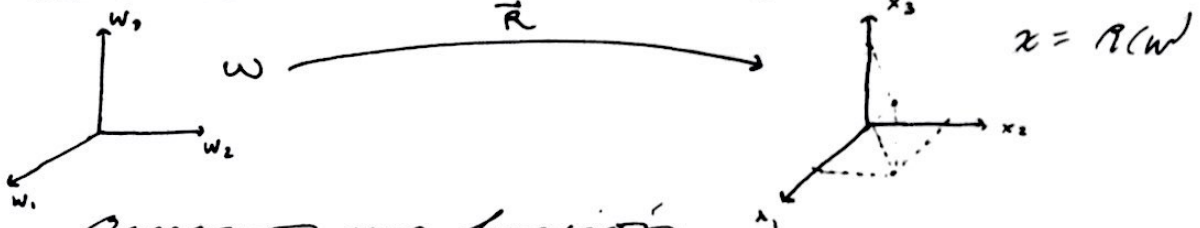
dem: $\vec{F}$ cons. $\Rightarrow \vec{F} = \nabla\varphi$.

luego $\text{rot}\vec{F} = \text{rot}(\nabla\varphi) = 0$.

~~Def~~ $\text{div}(\text{rot}\vec{F}) = 0$ si $\vec{F}$ es de clase C^2 .

Def: Si $\vec{F}$ cumple que $\text{div}\vec{F} = 0$, se dice que $\vec{F}$ es solenoidal. (En matemáticas se dice divergencia nula).

Coordenadas Curvilíneas Ortogonales



Buscamos una función que pueda ir del espacio W al X sin pérdida de generalidad. Para eso $\vec{R}$, la función que hace esto debe ser inyectiva. Le pediremos las siguientes propiedades:

$$\vec{R}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \vec{R}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \vec{R}(\Omega)$$

Ejemplos: Coordenadas Cilíndricas.

Anexias

8 de Agosto

P1/ Propiedades:

$$\begin{aligned}a) \nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\ &= \frac{\partial(fg)}{\partial x_i} \vec{e}_i \\ &= g \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \vec{e}_i \\ &= g\nabla f + f\nabla g\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \operatorname{div}(f\vec{F}) &= \nabla f \cdot \vec{F} + f \operatorname{div}(\vec{F}) \\
 &= \frac{\partial (f\vec{F})}{\partial x_i} \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{F}_i + f \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial x_i} \\
 &= \nabla f \cdot \vec{F} + f \operatorname{div}(\vec{F})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \operatorname{rot}(f\vec{F}) &= \nabla f \times \vec{F} + f \operatorname{rot}(\vec{F}) \\
 &= \nabla \times (f\vec{F}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} (f\vec{F})_j \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x_i} F_j \epsilon_{ijk} \vec{e}_k + f \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \\
 &= \nabla f \times \vec{F} + f \operatorname{rot} \vec{F}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) \operatorname{rot}(\nabla f) &= 0 \\
 &= \nabla \times (\nabla f) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad \text{Ni } f \in C^2 \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \epsilon_{ijk} \vec{e}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \epsilon_{j2k} \vec{e}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_j} \epsilon_{21k} \vec{e}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_2} \epsilon_{22k} \vec{e}_k + \dots \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e) \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) &= \nabla \operatorname{div}(\vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \\
 &= \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \times \vec{F})_j \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_l} F_m \epsilon_{lmj} \vec{e}_j \right] \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \\
 &= -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} F_m \epsilon_{lmj} \epsilon_{ikj} \vec{e}_k \\
 &= -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} F_m [\delta_{li} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mi}] \\
 &= -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} F_m \delta_{li} \delta_{mk} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} F_m \delta_{lk} \delta_{mi} \\
 &= -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} F_l \vec{e}_k + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} F_i \vec{e}_k \\
 &= \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_i \partial x_l} \vec{e}_k - \frac{\partial^2 F_l}{\partial x_i \partial x_l} \vec{e}_k \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_l} \right] \vec{e}_k - \nabla^2 F \\
 &= \nabla (\operatorname{div} \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}
 \end{aligned}$$

$\Delta = \nabla^2$
 se sabe
 $\forall l=i \wedge m=k$
 $\forall l=k \wedge m=i$

$$\begin{aligned}
 f) \nabla \times (\nabla^2 \vec{F}) &= \nabla^2 (\operatorname{rot}(\vec{F})) \\
 \text{Sabemos que } \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) &= \nabla \operatorname{div}(\vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \\
 \Rightarrow \nabla^2 \vec{F} &= \nabla \operatorname{div}(\vec{F}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) \\
 \nabla \times (\nabla^2 \vec{F}) &= \nabla \times (\nabla \operatorname{div}(\vec{F}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{F})) \\
 &= \nabla \times (\nabla \operatorname{div}(\vec{F})) - \nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \vec{F})) \\
 &= \nabla \times (\nabla \operatorname{div}(\vec{F})) - \nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \vec{F})) \\
 &= \nabla \times (\nabla \operatorname{div}(\vec{F})) + \nabla \times (\nabla^2 \vec{F}) \\
 &= \nabla^2 (\nabla \times \vec{F})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) \operatorname{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) &= \vec{F} \operatorname{div}(\vec{G}) - \vec{G} \operatorname{div}(\vec{F}) + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{F} \times \vec{G})_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} [F_l G_m \epsilon_{lmj}] \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \\
 &\Rightarrow \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} \quad (\dots)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h) \vec{F} \times \operatorname{rot}(\vec{F}) &= \frac{1}{2} \nabla(\vec{F} \cdot \vec{F}) - (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{F} \\
 &= F_i (\nabla \times \vec{F})_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \\
 &= F_i \left(\frac{\partial}{\partial x_l} F_m \epsilon_{lmj} \right) \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \\
 &= -F_i \frac{\partial}{\partial x_l} F_m \epsilon_{lmj} \epsilon_{ikj} \hat{e}_k \\
 &= -F_i \frac{\partial}{\partial x_l} F_m [\delta_{li} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mi}] \hat{e}_k \\
 &= (F_i \frac{\partial}{\partial x_l} F_m \delta_{lk} \delta_{mi} - F_i \frac{\partial}{\partial x_l} F_m \delta_{li} \delta_{mk}) \hat{e}_k \\
 &= F_i \frac{\partial}{\partial x_k} F_i \hat{e}_k - F_i \frac{\partial}{\partial x_i} F_k \hat{e}_k \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (F_i \cdot F_i) \hat{e}_k - F_i \frac{\partial}{\partial x_i} F_k \hat{e}_k \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (F_i \cdot F_i) \hat{e}_k - (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{F} \\
 &= \frac{1}{2} \nabla(\vec{F} \cdot \vec{F}) - (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{F}
 \end{aligned}$$

P2/ a) $\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (1)$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \nabla \times \vec{V} = 0$$

$$\mu = 0; \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

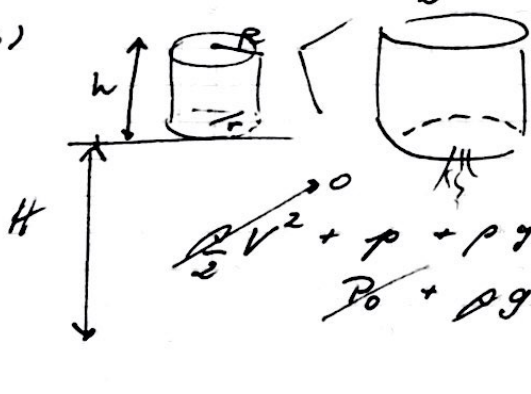
Desarrollando (1) resulta: $\rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}$
 pero $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$
 $\nabla \times \vec{V} = 0$

Desarrollando $\rho \cdot \frac{1}{2} \nabla(\vec{V}^2) = -\nabla p - \rho \vec{g}$
 $\nabla \left(\frac{\rho}{2} V^2 + p \right) + \nabla(\rho g z) = 0$

$$\therefore \nabla \left(\frac{\rho}{2} V^2 + p + \rho g z \right) = 0$$

$$\therefore \frac{\rho}{2} V^2 + p + \rho g z = C \in \mathbb{R}$$

b)



$p_0; V=0; z=H+h$
 $p_0; z=H; V=V_{salida}$
 $\frac{\rho}{2} V^2 + p + \rho g z = \frac{\rho}{2} V_0^2 + p_0 + \rho g h$
 $p_0 + \rho g(H+h) = \frac{\rho}{2} V_0^2 + p_0 + \rho g h$
 $V_0 = \sqrt{2gh}$

P3/

¿Qué es?

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2 && \rightarrow \text{Cilindro} \\ x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 && \rightarrow \text{Esfera} \\ x^2 - y^2 &= z^2 && \rightarrow \text{Hiperboloida} \\ x^2 + y^2 &= z && \rightarrow \text{Paraboloida} \\ x^2 + y^2 &= z^2 && \rightarrow \text{Cono} \end{aligned}$$

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 \\ z^2 + x^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \quad \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{Continuara...})$

Cálculo:

10 de Agosto

Otro caso: Coordenadas Esféricas. ¡Ojo con los factores de escala!

Def: Diremos que un sistema de coordenadas curvilíneas w es ortogonal, si $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Recordar: Las bases deben ser l.i.

Sea $\vec{R}$ una transformación: $\vec{R}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es biyectiva, al (al menos donde nos interesa).

El teorema de la función inversa dice que el Jacobiano de $\vec{R}$ es invertible, es decir $(\frac{\partial \vec{R}}{\partial w_1}, \frac{\partial \vec{R}}{\partial w_2}, \frac{\partial \vec{R}}{\partial w_3})$, luego, los vectores tangentes son l.i.

Si $\vec{r} = r_1 \vec{e}_1 + r_2 \vec{e}_2 + r_3 \vec{e}_3$

Entonces $\vec{r} = \sum_{i=1}^3 (\vec{r} \cdot \vec{w}_i) \vec{w}_i$ } Identidad de Fourier

Dem: $\vec{r} = \sum_{j=1}^3 \hat{r}_j \vec{w}_j$ / $\cdot \vec{w}_i$

$\vec{r} \cdot \vec{w}_i = \sum_{j=1}^3 \hat{r}_j \delta_{ij} = \hat{r}_i$

El gradiente: $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C_1 .

$\nabla g = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i} \vec{e}_i$; Sea g en coordenadas curvilíneas escrito en $\tilde{g}(w) = g(\vec{R}(w)) = g \circ \vec{R}(w)$.

Vemos que $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial w_i}(w) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \vec{R}_j}{\partial w_i}$
 $\frac{\partial \vec{R}_j}{\partial w_i} = \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial w_i} \right)_j = (h_i \hat{w}_i)_j$
 $= \nabla g \cdot h_i \hat{w}_i \quad (1)$

Si $\nabla g = \sum \hat{r}_i \hat{w}_i$
 $= \sum (\nabla g \cdot \hat{w}_i) \hat{w}_i$ } Notación de Id. de Fourier.
 $= \sum \frac{1}{h_j} \frac{\partial g}{\partial w_j} \hat{w}_j \quad (1)_{\text{por}}$

Es una: $\nabla g(x) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial w_j} \hat{w}_j$; con $x = \vec{R}(w)$

Ejercicios propuestos por el profe:

15 de Agosto

(1) Comprobar que los vectores tangentes calculados para las coordenadas esféricas son efectivamente ortogonales entre sí.

Se sabe que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-r \sin \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \cos \theta, 0)$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, -r \sin \varphi)$

1. $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = ((\sin \varphi \cos \theta) \cdot (-r \sin \varphi \sin \theta))^2 + ((\sin \varphi \cos \theta) \cdot (\sin \varphi \sin \theta))^2 + (0)^2)^{\frac{1}{2}}$
 $= (r^2 (\sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta)^2 + r^2 (\sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta)^2)^{\frac{1}{2}} = 0$

C'Es: $2\lambda(x^2+y^2+z^2)(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}) = 2\lambda(\rho^2+z^2)(\rho\hat{i}+z\hat{k}) = 2\lambda r^{2n-1}\hat{r}$?

P1/ a) $x^2+y^2 = 2z$ } Parabolóide
 $1+x+y-z=0$ (vector normal $\vec{n} = (1, 1, -1)$)

$x^2+y^2 = 2(x+y)+2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{1}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{1}\right)^2 = 1$

De tal manera que: $x = 1 + \cos t$
 $y = 1 + \sin t$
 $z = 3 + 2(\cos t + \sin t)$

$L = \int_a^b \|\dot{\gamma}'\| dt$; $\dot{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2(-\sin t + \cos t) \end{pmatrix}$
 $= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2-2\cos t \sin t} dt \rightarrow \text{¿? esta acotada}$

b) $x^2+y^2+z^2 = 1$ } esfera
 $z = x-1$ (vector normal $\vec{n} = (1, 0, -1)$)

$x^2+y^2+(x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x-1/2}{1/2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$

De tal manera que: $x = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}$
 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t$
 $z = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}$

$L = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}'\| dt$; $\dot{\gamma}'(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \sqrt{2}\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$
 $= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sqrt{2} dt = \sqrt{2}\pi$

P2/ a) Sea $\gamma \in \mathbb{R}^3$, curva en cilíndricas. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 Sea $c(t)$ la parametrización de γ .
 $c(t) = T \begin{pmatrix} \rho(t) \\ \theta(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ $\vec{n} = \frac{\partial \xi}{\partial u} / \left\| \frac{\partial \xi}{\partial u} \right\|$ $\checkmark$ h_u

$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt} = h_\rho \rho' \hat{\rho} + h_\theta \theta' \hat{\theta} + h_z z' \hat{z}$
 $\|c'\|^2 = (h_\rho \rho')^2 + (h_\theta \theta')^2 + (h_z z')^2$

$\therefore L = \int_a^b \sqrt{(h_\rho \rho')^2 + (h_\theta \theta')^2 + (h_z z')^2} dt$

Helice de radio 1: Si: Cartesianas Cilíndricas

$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t/2\pi \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t/2\pi \end{pmatrix}$
 $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{0^2 + 1^2 + (1/2\pi)^2} dt = \sqrt{(2\pi)^2 + 1}$

b) $\rho = r(1+\cos t)$; $\theta = t$; $z = 4r(1+\cos(t/2))$

$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r(1+\cos t))^2 + (-2r\sin(t/2))^2} dt$
 $= \int_0^{2\pi} r \sqrt{2(1+\cos t) + 4\sin^2(t/2)} dt$

$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$
 $\Rightarrow 2\cos^2(t/2) = \cos t + 1$
 $= \int_0^{2\pi} r \sqrt{4(\cos^2(t/2) + \sin^2(t/2))} dt$
 $= 4\pi r$

P3) $s = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_a^b 2\sqrt{10} dt$

$ds = 2\sqrt{10} dt$

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3\sin 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} \quad t \in [0, \infty[\quad \text{donde}$

$x = 2t$
 $y = 3\sin 2t$
 $z = 3\cos 2t$

$\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1$

ii) Longitud de arco $L = \int_0^t \|\vec{r}'\| dt'$; donde $\vec{r}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 6\cos 2t \\ -6\sin 2t \end{pmatrix}$; $\|\vec{r}'\| = 2\sqrt{10}$

$\therefore L = \int_0^t 2\sqrt{10} dt' \Rightarrow L = 2\sqrt{10} t \quad \therefore \frac{L}{2\sqrt{10}} = t \quad \therefore t_0 = \frac{L}{2\sqrt{10}} = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \vec{r}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} \\ 3\sqrt{3}/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$



$x = uv$
 $y = 1/u$

P4) Calcular los factores de escala:

$\vec{r}(\xi, \eta, \phi) = \begin{pmatrix} \xi \eta \cos \phi \\ \xi \eta \sin \phi \\ \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2) \end{pmatrix}$ donde los factores de escala son:

$h_\xi = \left\| \begin{pmatrix} \eta \cos \phi \\ \eta \sin \phi \\ -\xi \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\eta^2 + \xi^2}$; $h_\eta = \left\| \begin{pmatrix} \xi \cos \phi \\ \xi \sin \phi \\ \eta \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\eta^2 + \xi^2}$; $h_\phi = \left\| \begin{pmatrix} -\xi \eta \sin \phi \\ \xi \eta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \xi \eta$

17 de Agosto

Se define como positivo (según la mano derecha) en sentido

$\vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = \vec{w}_3$; $\vec{w}_2 \times \vec{w}_3 = \vec{w}_1$; $\vec{w}_3 \times \vec{w}_1 = \vec{w}_2$ si $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$

En cilíndricas: $\{\vec{\rho}, \vec{\phi}, \vec{z}\}$

En esféricas: $\{\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\phi}\}$

Gradiente: $\nabla g = \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \frac{\partial g}{\partial w_i} \vec{w}_i$

$\nabla w_i = \frac{1}{h_1} \frac{\partial w_i}{\partial w_1} \vec{w}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial w_i}{\partial w_2} \vec{w}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial w_i}{\partial w_3} \vec{w}_3$
 $= \frac{1}{h_i(w)} \cdot \vec{w}_i(w)$

Notar que $\frac{\partial w_i}{\partial w_i} = \delta_{ij}$ (delta de Dirac)

Cálculo de Divergencia en coordenadas curvilíneas.

Dado $\vec{F}$ en coordenadas cartesianas debemos escribirlo en la base ortogonal del sistema curvilíneo en las variables o coordenadas curvilíneas.

$\vec{F} = \sum F_{w_i} \vec{w}_i \Rightarrow$ Cómo calcular $\text{div} \vec{F} = \sum \text{div}(F_{w_i} \vec{w}_i)$?
 recordemos $\text{div}(\varphi \vec{F}) = \nabla \varphi \cdot \vec{F} + \varphi \text{div}(\vec{F})$

Lema: $\text{div}\left(\frac{h_i}{H} \vec{w}_i\right) = 0$; donde $H = h_1 h_2 h_3$

Dem: $i=1$: $\frac{h_1}{H} \vec{w}_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \vec{w}_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \vec{w}_2 \times \vec{w}_3 = \frac{\vec{w}_2}{h_2} \times \frac{\vec{w}_3}{h_3} = \nabla w_2 \times \nabla w_3$

Así, $\text{div}\left(\frac{h_1}{H} \vec{w}_1\right) = \text{div}(\nabla w_2 \times \nabla w_3)$; recordemos: $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{G} - \text{rot} \vec{G} \cdot \vec{F}$

2 como $\text{rot}(\nabla w_i) = 0$, se completa la demostración.

Para nuestro cálculo: $\text{div}(F_{w_i} \vec{w}_i) = \text{div}\left[\left(\frac{h_i}{H} F_{w_i}\right) \cdot \left(\frac{h_i}{H} \vec{w}_i\right)\right]$
 $= \nabla\left(\frac{h_i}{H} F_{w_i}\right) \cdot \frac{h_i}{H} \vec{w}_i + \frac{h_i}{H} F_{w_i} \text{div}\left(\frac{h_i}{H} \vec{w}_i\right)$

noto vale si $(i=j)$

$$= \left[\sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \frac{\partial}{\partial w_j} \left(\frac{h_j}{H} F_{wi} \right) \hat{w}_j \right] \cdot \frac{h_i}{H} \hat{w}_i$$

$$= \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial w_i} \left(\frac{h_i}{H} F_{wi} \right) \frac{h_i}{H}$$

$$= \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial w_i} \left(\frac{h_i}{H} F_{wi} \right) \Rightarrow \text{div } \vec{F} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial w_i} \left(\frac{h_i}{H} F_{wi} \right)$$

En esféricas: $\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \varphi F_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \varphi F_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r F_\theta) \right\}$

$$= \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$$

Ejemplo en casos centrales: $\vec{F} = g(r) \hat{r}$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \varphi \cdot g(r)) \right\}$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 g(r))$$

$$= \frac{2}{r} g(r) + g'(r)$$

Si $\text{div } \vec{F} = 0 = \frac{2}{r} g(r) + g'(r) \Leftrightarrow g(r) = \frac{c}{r^2}$; con $c \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ Todo campo central a div nula tiene la forma $\vec{F} = \frac{c}{r^2} \hat{r}$

Cálculo de Rotor: $\vec{F} = \sum F_{wi} \hat{w}_i$

$\text{rot } \vec{F} = \sum (\text{rot}(F_{wi} \hat{w}_i))$ // recordemos: $-\text{rot}(\varphi \vec{F}) = \nabla \varphi \times \vec{F} + \varphi \text{rot } \vec{F}$

Cálculos: $\text{rot}(F_{wi} \hat{w}_i) = \text{rot} \left(h_i F_{wi} \frac{\hat{w}_i}{h_i} \right)$ $\nabla \hat{w}_i = \frac{1}{h_i} \hat{w}_i$

$$= \text{rot}(h_i F_{wi} \nabla \hat{w}_i) = \nabla(h_i F_{wi}) \times \hat{w}_i + h_i F_{wi} \nabla \times \hat{w}_i$$

$$= \left[\sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \frac{\partial}{\partial w_j} (h_i F_{wi}) \hat{w}_j \right] \times \frac{\hat{w}_i}{h_i} = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial}{\partial w_j} (h_i F_{wi}) (\hat{w}_j \times \hat{w}_i)$$

$$+ \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial}{\partial w_j} (h_i F_{wi}) (\hat{w}_j \times \hat{w}_i)$$

$$= -\frac{h_j}{h_i} \frac{\partial}{\partial w_j} (h_i F_{wi}) \hat{w}_i + \frac{h_j}{h_i} \frac{\partial}{\partial w_j} (h_i F_{wi}) \hat{w}_j; \text{ etc...}$$

Resultado $\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{H} \det \begin{bmatrix} h_1 \hat{w}_1 & h_2 \hat{w}_2 & h_3 \hat{w}_3 \\ \frac{\partial}{\partial w_1} & \frac{\partial}{\partial w_2} & \frac{\partial}{\partial w_3} \\ h_1 F_{w1} & h_2 F_{w2} & h_3 F_{w3} \end{bmatrix}$

Integrales de un campo vectorial a lo largo de una curva: Integrales de Línea 22 de Agosto

Primero: Trabajo de una fuerza al desplazar una partícula a lo largo de una trayectoria.

Considerar: $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$

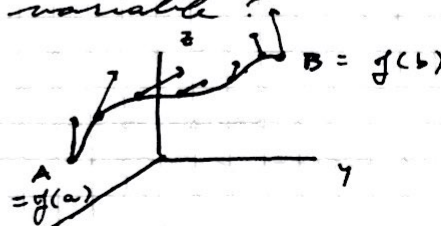
$W_{AB} = \|\vec{AB}\| \|\vec{F}\| \cos \theta$

¿Cómo sería el caso de una fuerza variable?

1º El W es aditivo.

Curva: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $t \mapsto \gamma(t)$

Digamos ^{que es} de clase C^1 para evitar problemas.



Entre la i -ésima y j -ésima coordenada, x
 el trabajo viene dado por:

$$W_j \approx \|g(t_{j+1}) - g(t_j)\| \cdot \|\vec{F}(t_j)\| \cos(\theta_j)$$

Con $g(t_j)$ (Vector Tangente); $\vec{t} = \frac{g'}{\|g'\|} \Rightarrow \vec{F} = \|\vec{F}\| \cos \theta = \vec{F}(g(t)) \cdot \vec{t}$

Además, $g(t_{j+1}) = g(t_j + \Delta t_j)$, donde $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$
 Por Taylor: $= g(t_j) + g'(t_j) \Delta t_j + o(\Delta t_j)$

$\Rightarrow \|g(t_{j+1})\| \approx \|g'(t_j)\| \Delta t_j$
 Con esto, el trabajo queda: $W_{AB} \approx \sum_{j=0}^n \|g'(t_j)\| \Delta t_j \cdot \vec{F}(g(t_j)) \cdot \frac{g'(t_j)}{\|g'(t_j)\|}$

Finalmente: $W_{AB} \approx \sum_{j=0}^n \underbrace{\vec{F}(g(t_j)) \cdot g'(t_j)}_{f(t_j)} \Delta t_j$

$f(t_j) \rightarrow f$ es integrable (Riemann): $\int$

Cuando $\Delta t_j \rightarrow 0$, la aprox. converge:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \vec{F}(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

Definición: El trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de la trayectoria g la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de γ .

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

Ej: $\vec{F} = (x, xy, yz^2)$ cuando:

$$x = \cos(-t) \quad \text{con } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$z = \sin(-t) + 1$$



Circunferencia de radio 1, de centro $(0, 1, 1)$ en plano $y=1$.

$$g'(t) = (\cos(-t), 1, \sin(-t) + 1)$$

$$\text{Long } W = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(t) \cdot \cos(t) + 1 \cdot 0 + (\sin(t) + 1) \cdot \cos(t)) dt$$

Propiedades: Si g se ~~parametriza~~ recorre en sentido inverso lo notaremos $-g$

$$g: t \mapsto g(t) \quad t \in [a, b]$$

$$-g: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto g(b - (t - a))$$

$$(-g)(a) = g(b - (a - a)) = g(b)$$

$$(-g)(b) = g(b - (b - a)) = g(a)$$

Se puede demostrar fácilmente que $\int_{-g} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_g \vec{F} \cdot d\vec{r}$

• Linealidad: $\int_{\gamma} (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) \cdot d\vec{r} = \alpha \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \beta \int_{\gamma} \vec{G} \cdot d\vec{r}$

• Additividad: Si $g_1 + g_2$ representa recorrer γ_1 y luego γ_2

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

• Acotamiento: Si $\|\vec{F}\| \leq C$ sobre g , $\Rightarrow \left| \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right| \leq C \cdot \text{long}(\gamma)$

$$\left| \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right| = \left| \int_a^b \vec{F}(g(t)) \cdot g'(t) dt \right|$$

$$\text{desigualdad} \leq \int_a^b \|\vec{F}(g(t))\| \cdot \|g'(t)\| dt$$

$$\leq \int_a^b \|\vec{F}\| \cdot \|g'\| dt \leq C \cdot \int_a^b \|g'\| dt = C \cdot \text{long}(g)$$

TFC para integrales de línea:

φ será primitiva de $\vec{F}$ si $\nabla \varphi = \vec{F}$

$$\text{Ejemplo: } \int_{\gamma} \nabla \varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(g(b)) - \varphi(g(a))$$

$$\int_{\gamma} \nabla \varphi \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla \varphi(g(t)) \cdot g'(t) dt; \quad \nabla \varphi(g(t)) \cdot g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(g(t)) \cdot g'_i(t)$$

$$= \frac{d}{dt} (\varphi(g'(t))) ; \text{ así que } \int_a^b \nabla \varphi dr = \int_a^b \frac{d}{dt} \varphi(g(t)) dt = \varphi(g(b)) - \varphi(g(a)).$$

Observación: No todo $\vec{F}$ tiene primitiva.

Definición: Si $\vec{F}$ es un gradiente de alguna función φ , $\vec{F}$ se dice conservativo.

Auxiliar 3:

(i) Campos e Integral de Trabajo

$$\vec{F} \in C^2(\Omega) \Rightarrow \text{Es conservativo} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = 0.$$

$$\Rightarrow \exists \phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{F} = \nabla \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ donde } \vec{F}_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}.$$

P1) Determinar si los campos son conservativos y calcular su Potencial si lo es.

$$a) \vec{F}_1(x, y, z) = \left(\frac{y}{z^2+4}, \frac{x}{z^2+4}, -\frac{2xyz}{z^4+8z^2+16} \right)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right] - \vec{j} \left[\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right] + \vec{k} \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right]$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial F_3}{\partial y} &= -\frac{2xz}{(z^2+4)^2} & \frac{\partial F_2}{\partial z} &= -\frac{2yz}{(z^2+4)^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= \frac{y}{(z^2+4)^2} & \frac{\partial F_3}{\partial x} &= -\frac{2yz}{(z^2+4)^2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{1}{z^2+4} & \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{1}{z^2+4} \end{aligned}$$

$$\text{Luego } \nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} -\frac{2xz}{(z^2+4)^2} - \left(-\frac{2xz}{(z^2+4)^2} \right) \\ \frac{y}{(z^2+4)^2} - \left(-\frac{2yz}{(z^2+4)^2} \right) \\ \frac{1}{z^2+4} - \frac{1}{z^2+4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left| \begin{array}{ll} \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y & \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 & \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} = 0 & \frac{\partial F_3}{\partial y} = 1 \end{array} \right.$$

$$\vec{F}_2(y, x, z) \Rightarrow \nabla \times \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1-2y \end{bmatrix} \} \text{ no es conservativo.}$$

$$\text{En a), al Potencial } \Rightarrow \exists \phi \text{ tal que } \vec{F}_1 = \nabla \phi. \Rightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{y}{z^2+4} \Rightarrow \phi(x, y, z) = \frac{xy}{z^2+4} + C(y, z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{z^2+4} \Rightarrow \phi(x, y, z) = \frac{xy}{z^2+4} + C(x, z); \text{ pero } \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{z^2+4} + \frac{\partial C}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \Rightarrow C(y, z) = C(z).$$

$$\text{Luego: } \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{-2xy}{(z^2+4)^2} + \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{-2xyz}{(z^2+4)^2} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

$\therefore C$ no depende de nada, por lo que es C .

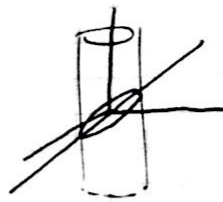
$$\phi(x, y, z) = \frac{xy}{(z^2+4)} + C.$$

b) Calcular: $\int_C (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot d\vec{r}$

Donde C es $x^2 + y^2 = 1$
 $z = 2$.

de $(1, 0, 0)$ a $(-1, 0, 0)$

$(1, 0, 0) \rightarrow (2\pi, 0, 0) \text{ y } (\pi, 0, 0)$



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\cos t \quad \sin t$$

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t \quad t \in [a, b]$$

$$z = 2$$

$$z \leq 0 \Rightarrow t \in [\pi, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^\pi \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^\pi \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_0^\pi \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} \quad \text{TFC !!!}$$

$$\int_C \nabla \phi = \phi(b) - \phi(a) \quad ; \quad \vec{F}_2: \int_0^\pi \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \quad ; \quad \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \int_0^\pi (\sin^2 t, \cos t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, \cos t) dt$$

$$= \int_0^\pi (-\sin^3 t + \cos^2 t) dt = \int_0^\pi [-\sin t(1 - \cos^2 t) + \cos^2 t] dt$$

$$= \int_0^\pi -\sin t + \int_0^\pi \cos^2 t \sin t + \int_0^\pi \cos 2t + \pi$$

$$= \cos t \Big|_0^\pi + \frac{-\cos^3 t}{3} \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^\pi + \pi$$

$$= (-1 - 1) + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] + \frac{1}{2} (0) + \pi = (-2 + \frac{2}{3} + \pi)$$

Calculus:

29 de Agosto

Def: $\vec{F}$ (de clase C^1 en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto) es conservativo si $\exists \varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla \varphi = \vec{F}$ (o $-\nabla \varphi = \vec{F}$)

$\vec{F}$ conservativo $\Leftrightarrow \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \gamma \subseteq \Omega$

Con γ una curva cerrada: $\gamma(a) = \gamma(b)$,

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \subseteq \Omega \quad \gamma_1: \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$$

$$\gamma_2(b) = \gamma_1(b)$$

Una forma de encontrar φ es integrando:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Otra manera de resolver: $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = F_i(x) \quad i=1, \dots, n$

Propiedad: Si $\vec{F}$ es conservativo entonces $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$.

Dem: $\text{rot } \vec{F} = \text{rot}(\nabla \varphi) = \vec{0}$.

En realidad, podemos caracterizar:

$\vec{F}$ conservativo en $\mathbb{R}^n \Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$

$$\text{dem: } F_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)$$

Observación:

Si $\text{rot}(\vec{F}) \neq \vec{0}$, se concluye que $\vec{F}$ es no conservativo.

Si $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$: No necesariamente es conservativo.

Aplicación En Mecánica:

Una partícula puntual de masa m que recorre una trayectoria: $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [a, b]$

Hip: $\vec{F}$ cumple con que $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{F} = -\nabla \varphi$ φ potencial

Sea W el trabajo realizado entre $x(a)$ y $x(b)$

$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) dt$, Conservativo: $W = \int_a^b (-\nabla \varphi) \cdot \vec{r}'(t) dt = -\int_a^b \nabla \varphi \cdot \vec{r}'(t) dt$
 $= \varphi(A) - \varphi(B)$
 Newton: $W = \int_a^b (m\ddot{x}) \cdot \vec{r}'(t) dt = m \int_a^b \ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t) dt$

Donde $\frac{d}{dt} [x'(t) \cdot x'(t)] = 2x''(t) x'(t)$

$\therefore W = \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} (x'(t) \cdot x'(t)) dt = \frac{1}{2} m \|x'(t)\|^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2} m (\|x'(b)\|^2 - \|x'(a)\|^2)$

Por notación $\varphi_A = \varphi(A)$ y $\varphi_B = \varphi(B)$

Luego $W = \varphi_A - \varphi_B = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$
 $\varphi_A + \frac{1}{2} m v_A^2 = \varphi_B + \frac{1}{2} m v_B^2$

Es decir: $\varphi(x(t)) + \frac{1}{2} m v^2(t) = cte.$

en potencial en t } en mecánica.
 en cinéticos en t

Green: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$ con las buenas orientaciones.

Normalmente, se denota $\partial R = \partial R$.
 En particular, $\vec{F}$ en C^1 en todo R .

TFC: en R : $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.

Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ ? & x = 0 \end{cases}$ $\int_{-5}^5 f'(x) dx = 0$
 $\neq f(5) - f(-5) = 2$

Def: $R \subset \mathbb{R}^2$ se dice:

simplemente conexo: $\rightarrow$ es conexo
 $\rightarrow$ toda las curvas ocupan puntos del conjunto.

Teorema: Si R es simplemente conexo y $\vec{F}$ es un campo C^1 en R tal que $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ en R . Entonces $\vec{F}$ es conservativo.

Auxiliarios # 4

Stokes: $\oint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$

$\oint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$; $\vec{F} = \begin{pmatrix} M(x,y) \\ N(x,y) \end{pmatrix}$
 $\vec{F} \in C^1(R)$ $R \subset \mathbb{R}^2$.

$\therefore \nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \\ \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \hat{k}$
 $= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$

Ej a) $\frac{1}{2} \oint_{\partial D} (x dy - y dx) = A(D)$.

sabemos por green que.

$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy$; en $\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$\therefore \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 2$ $\frac{1}{2} \oint_{\partial D} (-y) dx + x dy = \frac{1}{2} \iint_D 2 dA = \iint_D dA$

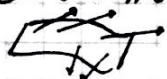
Area

$$\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n}$$

Integrales de Flujo:

Dados $\vec{F}$ campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ y una super-
ficie $S \subset \mathbb{R}^3$.

7 de Septiembre



El flujo cuantifica cuánto "material" pasa a través de S .

El flujo es orientado. Depende de hacia qué lado pasa.

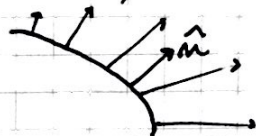


¿Cuál es el sentido $\oplus$?

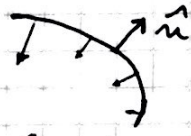
¡Hay que definirlo en cada caso!

Cuando posible escoger un sentido: se dice que la superficie es orientable.

Math: S es orientable si $\forall x \in S$ existe un $\vec{W}(x)$ normal a S tal que $\vec{W}(x)$ es continua.

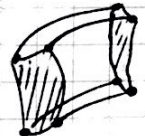


flujo > 0 .



flujo < 0 .

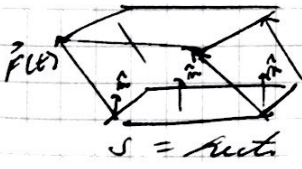
Cálculo de flujo:



"Entrada fluida" de volumen $V(t)$.

flujo $\approx$ Volumen que pasa a través de S por unidad de tiempo.
 $\approx V'(0)$

Caso simple: $S = \text{rectángulo}$
 $\vec{F} = \text{cte.}$



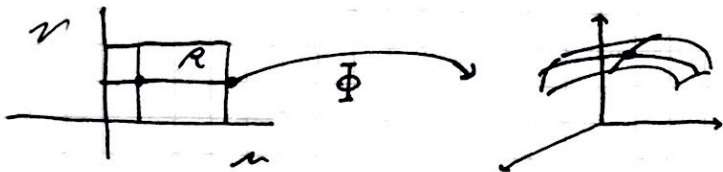
Perfil: $\vec{F}(t) \cdot \vec{n} \cdot \text{área}(S)$

$$V(t) = (\vec{F}(t) \cdot \vec{n}) \cdot \text{área}(S)$$

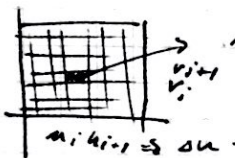
$$V'(0) = \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot \text{área}(S).$$

En un caso gen: 

$\approx$ rectángulo. $\text{flux}_k = (\vec{F} \text{ en } S_k) \cdot \vec{n} \cdot (\text{en } S_k) \cdot \text{área}(S_k)$
 sumamos ... Integral de Superficie



$S = \phi(R)$: 
 ϕ continua
 ϕ de clase C^1 .



$$R_{ij} = [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$$

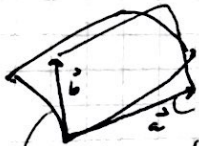


$$u_i, u_{i+1} \Rightarrow \Delta u = u_{i+1} - u_i$$

$t \in [0, \Delta u]$: se aproxima "vertical" $\phi(u_i, v_j)$

$$\phi(u_i + t, v_j) = \phi(u_i, v_j) + \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_i, v_j) \cdot t + \text{Error}(t^2)$$

$$\phi(u_i, v_j + t) = \phi(u_i, v_j) + \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_i, v_j) \cdot t + \text{Error}(t^2)$$



$$\phi(u_i, v_j) + \frac{\partial \phi}{\partial u} \Delta u, \text{ Área de un paralelogramo}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \Delta v$$

$$\phi(u_i, v_j) + \frac{\partial \phi}{\partial v} \Delta v$$

Definimos: $\text{Además: } \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\}$ l.i.

$$\text{Área}(\Delta_{ij}) \approx \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$$

$$\vec{F}_{ij} = \vec{F}(\phi(u_i, v_j)) ; \vec{n} = \pm \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ; \pm \text{ por el sentido}$$

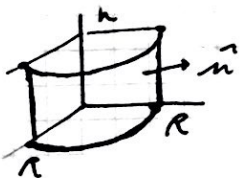
Así, el flux se aproxima como:

$$\text{flux} \approx \sum_{ij} \vec{F}(\phi(u_i, v_j)) \cdot \pm \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) \cdot \frac{1}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|} \Delta u \Delta v$$

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0} = \iint_R \vec{F}(\phi(u, v)) \cdot \pm \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) du dv \quad \} \text{flux}$$

Ejemplo: $\vec{F}(x) = x$ ($r = r^1$)

$S = 1/4$ de cilindro: Orientado $\oplus$ hacia el ∞ .



$$\text{flux} = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS ; \phi(\sigma, z) = \text{punto de coord. curvas } (r, \sigma, z)$$

$$\vec{n} = \vec{r}^1 = \vec{r}^1 + z \vec{z}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{n} = r = \frac{dr}{d\sigma}$$

$$\text{flux} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = r \iint_S dS = 1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot H //$$

12 de Septiembre

Teorema de Gauss y de la Divergencia

Sea $\vec{F}$ campo vectorial C^1 en un volumen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.
 Y sea S su frontera (= borde) una superficie regular (y orientable).
 orientada con la normal exterior.



$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Si Gauss es válido en cada uno de ellos, entonces es válido en la unión de ellos.

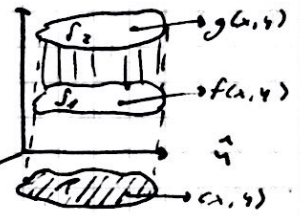
$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \vec{F} dV &= \int_{\partial\Omega_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS & \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \vec{F} dV &= \int_{\partial\Omega_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \vec{F} dV + \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \vec{F} dV &= \int_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} \operatorname{div} \vec{F} dV \\ &= \int_{\partial\Omega_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \int_{\partial\Omega_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \int_{\text{interior}} \vec{F} \cdot (-\vec{n}) dS. \end{aligned}$$

Y si completamos por memoria el Ω original, se obtiene Gauss en todo Ω .

$$f, g : \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) \quad g(x, y).$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \mathcal{R} \wedge f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

$$\partial\Omega = S_1 + S_2 + L$$



Parametrizas $S_1 : (x, y) \in \mathcal{R} \xrightarrow{\Phi_1} (x, y, f(x, y))$
 $S_2 : (x, y) \in \mathcal{R} \xrightarrow{\Phi_2} (x, y, g(x, y))$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \pm \int_{\mathcal{R}} (\vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right) du dv.$$

(orientación)

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x})$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y})$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_1+S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_{\mathcal{R}} \vec{F}(x, y, g(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) dx dy + \iint_{\mathcal{R}} \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) dx dy \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \left\{ F_1(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} + F_2(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} - F_3(x, y, f(x, y)) - F_1(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x} - F_2(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y} + F_3(x, y, g(x, y)) \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Si $\vec{F} = (0, 0, F_3)$.

$$\iint_{S_1+S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\mathcal{R}} \{ F_3(x, y, g(x, y)) - F_3(x, y, f(x, y)) \} dx dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\int_{f(x, y)}^{g(x, y)} \frac{\partial}{\partial z} (F_3(x, y, z)) dz \right) dx dy$$

26 de Septiembre

$\vec{F}$ campo C^1 en $\mathbb{R}^3$

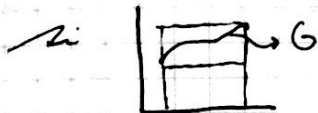
Sea Ω_ϵ volumen de "tamaño" ϵ

Por ejemplo  cubo de lado ϵ (Bola de radio ϵ)

Vemos cuando $\epsilon \rightarrow 0$.
 $x_0 \in \Omega_\epsilon \quad \forall \epsilon$.

Teorema de la Divergencia: $\int_{\Omega_\epsilon} \text{div } \vec{F} \, dx = \int_{\partial \Omega_\epsilon} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$

Teorema del Valor Medio (TVM):



$$\min_{y \in \Omega_\epsilon} G(y) \leq G(x) \leq \max_{y \in \Omega_\epsilon} G(y)$$

$$= \int_{\Omega_\epsilon} \min_{y \in \Omega_\epsilon} G(y) \, dx \leq \int_{\Omega_\epsilon} G(x) \, dx \leq \int_{\Omega_\epsilon} \max_{y \in \Omega_\epsilon} G(y) \, dx$$

$$= (\min_{y \in \Omega_\epsilon} G(y)) \cdot \text{med}(\Omega_\epsilon) \leq \int_{\Omega_\epsilon} G(x) \, dx \leq (\max_{y \in \Omega_\epsilon} G(y)) \cdot \text{med}(\Omega_\epsilon)$$

$$= \min_{y \in \Omega_\epsilon} G(y) \leq \frac{1}{\text{med}(\Omega_\epsilon)} \int_{\Omega_\epsilon} G(x) \, dx \leq \max_{y \in \Omega_\epsilon} G(y)$$

$\therefore$ Como G es continua en Ω_ϵ , $\exists \xi_\epsilon$ tal que

$$\Rightarrow \frac{1}{\text{med}(\Omega_\epsilon)} \int_{\Omega_\epsilon} G(x) \, dx = G(\xi_\epsilon)$$

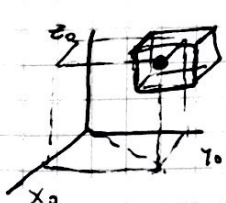
En este caso: $G(x) = \text{div } \vec{F}(x)$ continua.

$$\int_{\partial \Omega_\epsilon} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \text{med}(\Omega_\epsilon) \cdot \text{div}(\vec{F}(\xi_\epsilon))$$

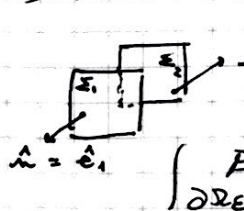
Para algún $\xi_\epsilon \in \Omega_\epsilon$

Ejemplo: $\vec{F}(x, 0, 0)$; $\text{div } \vec{F} = a$.

Vamos con la técnica anterior:

 $\Omega_\epsilon = [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \times [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon] \times [z_0 - \epsilon, z_0 + \epsilon]$
 $\text{Vol}(\Omega_\epsilon) = \text{med}(\Omega_\epsilon) = 8\epsilon^3$

Solo el flujo no nulo es en dos caras:

 $\hat{n} = -\hat{e}_1$ $\int_{\partial \Omega_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma_1} \dots + \int_{\Sigma_2} \dots = \int_{\Sigma_1} a(x_0 + \epsilon) \, dS + \int_{\Sigma_2} a(x_0 - \epsilon) \, dS$
 $\hat{n} = \hat{e}_1$ $\int_{\partial \Omega_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} = a(x_0 + \epsilon) 4\epsilon^2 - a(x_0 - \epsilon) 4\epsilon^2 = 8a\epsilon^3$

Luego: $\frac{1}{\text{med}(\Omega_\epsilon)} \int_{\partial \Omega_\epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{8a\epsilon^3}{8\epsilon^3} = a : \epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \text{div } \vec{F}(x_0) = a$

Fluidos incompresible y divergencia



flujo de líquidos incompresible.

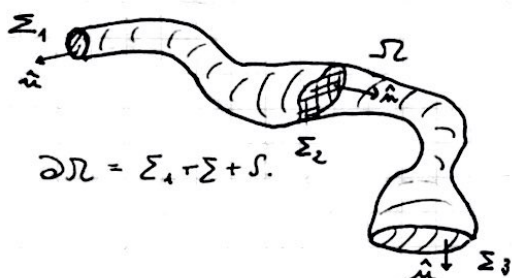
Sea $\vec{V}$ el campo de velocidades.

$$\int_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot \vec{ds} = \text{flujo neto} = 0 \text{ si es incompresible}$$

Es decir: Teorema: $\int_{\Omega} \text{div}(\vec{V}) dx = 0$.

si $\text{div} \vec{V}$ es continuo: $\text{div} \vec{V} = 0$

"Teorema" $\vec{V}$ campo de velocidades de un fluido incompresible $\Leftrightarrow \text{div} \vec{V} = 0$.



Cantidad de Entrada $\int_{\Sigma_1} \vec{V} \cdot \vec{ds}$

Cantidad de Salida $\int_{\Sigma_2} \vec{V} \cdot \vec{ds}$

$\vec{V}$ es tangente a S .

$$\vec{V} \cdot \hat{n} = 0 \text{ en } S$$

$$\int \text{div} \vec{V} dx = 0.$$

$$0 = - \int_{\Sigma_1} \vec{V} \cdot \vec{ds} + \int_{\Sigma_2} \vec{V} \cdot \vec{ds} + \int_S \vec{V} \cdot \vec{ds} \Rightarrow \int_{\Sigma_1} \vec{V} \cdot \vec{ds} = \int_{\Sigma_2} \vec{V} \cdot \vec{ds}$$

$\therefore$ tiene el mismo flujo.

Como calcular el volumen con Teorema de la divergencia

$$\text{mesol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx \Rightarrow \text{Existencia campos de } \text{div} = 1 ?$$

Ejemplo: $F(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z)$

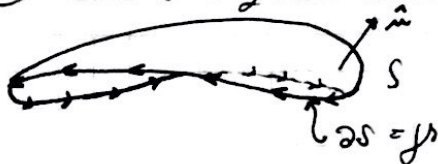
$$\therefore \text{Vol}(\Omega) = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \vec{x} \cdot \hat{n} ds \quad \text{Ej: } \Omega = B(0, R) = BR$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\partial BR} \vec{x} \cdot \hat{n} ds = \frac{1}{3} \int_{\partial BR} R \hat{n} \cdot \hat{n} ds = \frac{R}{3} \int_{\partial BR} ds.$$

$$\therefore \text{Vol}(\Omega) = \frac{R}{3} \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Teorema de Stokes (o del Rotor)

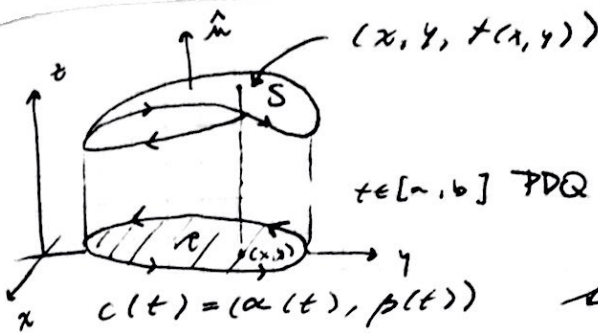
Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y $\vec{F}$ campo C^1 en S (y en torno a S)



Entonces

$$\int_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \vec{ds} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

28 de Septiembre



$$\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t), f(\alpha(t), \beta(t)))$$

$$t \in [a, b] \text{ P.D.Q: } \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \frac{d\vec{S}}{\hat{n} \cdot dS} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

$$c(t) = (\alpha(t), \beta(t)) \text{ se define: } \phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \longrightarrow \phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

$$\text{hacer que: } \vec{\nu} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} = (-f_x, -f_y, 1) \longrightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

$$\therefore \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t), \beta(t), f(\alpha(t), \beta(t))) \cdot (\alpha'(t), \beta'(t), f_x \alpha'(t) + f_y \beta'(t)) dt$$

$$= \int_a^b [F_1 \alpha' + F_2 \beta' + F_3 (f_x \alpha' + f_y \beta')] dt.$$

$$= \int_a^b \{ (F_1 + F_3 f_x) \alpha' + (F_2 + F_3 f_y) \beta' \} dt.$$

$$= \oint_c (F_1 + F_3 f_x, F_2 + F_3 f_y) \cdot d\vec{r} \xrightarrow{(\alpha', \beta')} dt$$

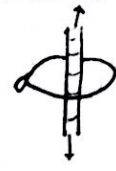
$$= \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} f_x + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} f_x \right) f_y + F_3 f_{xy} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} f_y + \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} f_y \right) f_x + F_3 f_{yx} \right) \right) dx dy$$

$$= \iint_R \left\{ \left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \right) f_x + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) f_y + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right\} dx dy$$

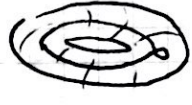
$$= \iint_R (\text{rot } \vec{F}) \cdot (-f_x, -f_y, 1) dx dy$$

$$= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \blacksquare$$

Def: Ω es un dominio simplemente conexo si toda curva cerrada se puede contraer a un punto sin salirse de Ω .

$\mathbb{R}^3$ Cilindro infinito:  no es s. conexo

$\mathbb{R}^3 \setminus$ Esfera si es s. conexo 

Esfera no es s. conexo 

Alternativamente:

simplemente $\Leftrightarrow$ Toda curva cerrada es el borde de una superficie $S \subseteq \Omega$.

Teorema: Sean $\vec{F} \in C^1$ en Ω , Ω simplemente conexo.

son equivalentes: a) $\text{rot } \vec{F} = 0$
b) $\vec{F}$ es conservativo.

dem: $b \Rightarrow a$ es directa.

Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)

Lo que se busca es una función de varias variables:

$$u: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{en genl. veremos } n=2,3)$$

Y se requiere que u cumpla una ecuación en la que aparezcan derivadas parciales de u :

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos(x+y)$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

⋮

La derivada de mayor orden indica el orden de la ecuación.

En genl. se pueden escribir como $P(u) = f$, donde P es un operador diferencial.

$$P \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + 5 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}, \text{ así, (1) queda } P(u) = \cos(x+y)$$

$$\tilde{P} \equiv \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}, \text{ así, (2) queda } P(u) = 1.$$

Es una ecuación lineal si P es lineal.

P es la suma de derivadas parciales con coeficientes.

$$\text{Más precisamente: } P(\alpha u + \beta v) = \alpha P(u) + \beta P(v)$$

$$\text{Demostración: } P(u) = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} P(\alpha u + \beta v) &= x \frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial x} + y \frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial y} \\ &= x \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + y \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \alpha P(u) + \beta P(v) \end{aligned}$$

Por restringirnos a las EDP de 2° orden lineales, coeficientes constantes.

$$\begin{aligned} \text{En } \mathbb{R}^2, \text{ lo más genl: } P(u) &= a u + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} + d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &\quad + e \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Las ecuaciones de esta familia se clasifican en elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

$$\text{Laplace } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta u = 0$$

ecuación de calor $\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = 0.$

ecuación de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0.$

Tomamos la ecuación de calor o ecuación de conducción del calor en sólidos homogéneos.

La incógnita es $T = \text{temperature}$ y más precisamente, para un sólido buscamos $\Omega \in \mathbb{R}^3$, la temperature en $c/x \in \Omega$, y en cada instante $t \in \mathbb{R}$ ($t \in [0, t_f]$).

$$T: \Omega \times [0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \longmapsto T(x, t)$$

T es una manifestación de una forma de energía llamada calor.

Hipótesis: Si Q es el calor en un volumen $\omega = \square$ a temperature T , se cumple que:

$$Q = \underbrace{c \cdot \rho \cdot \text{vol}(\omega)}_{\text{cte. de prop}} \cdot T$$

$c = \text{capacidad calorífica del material}$

Si T es variable (función de x)

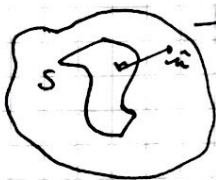
$$f(t) = Q(\omega, t) = \int_{\omega} c \rho T(x, t) dx.$$

Flejo del calor (movimiento de este) (Fourier)

El calor fluye desde T grande a T chico.

Postulamos postular el flejo en dirección $-\nabla T$.

Fourier propuso: $\vec{q} = -k \nabla T$



El calor que atraviesa material $S \times$ unidad de tiempo. y

$$\int_S \vec{q} \cdot d\vec{s} = -k \int_S \nabla T \cdot d\vec{s}$$

Sea $\omega \in \Omega$ la variación en ω es $\frac{d}{dt} Q(\omega, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q(\omega, t) &= \frac{d}{dt} \int_{\omega} c \rho T(x, t) dx \\ &= c \rho \int_{\omega} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) dx. \end{aligned}$$

Para esta variación de calor es debida al flejo de calor:

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\partial\omega} \vec{q} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_{\partial\omega} -k \nabla T \cdot d\vec{s}$$

$$= -k \int_{\partial\omega} \nabla T \cdot d\vec{s}$$

Pero... ¡Conservación de la E!

$$c_p \int_{\omega} \frac{\partial T}{\partial t} d\omega = k \int_{\partial\omega} \nabla T \cdot d\vec{s}$$

$$= k \int_{\omega} \operatorname{div}(\nabla T) \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int_{\omega} \left\{ c_p \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T \right\} dx = 0 \quad \forall \omega \in \mathcal{R}.$$

Luego debe ser: $c_p \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T \quad \text{con } \alpha = \frac{k}{c_p}.$$

Regimen T en algún instante inicial:
Condición Inicial

Como se relaciona el sólido con el medio ambiente: i) aislado & no térmicamente
ii) al exterior, la temperatura es conocida.

Auxiliar 7:

Teorema:	Gauss	Stokes
	$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV$	$\oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} dA$
	Para continuos hermiticos	Para vasos.

* ¿Cómo? : i) Si pide flujo, tomar divergencia del campo
Amigable si div es cte & 0. (o fácil)

¿Qué pide Gauss? : $\vec{F}$ que sea C^1 en $\mathcal{U} \supset \Omega$ ^{✓ volumen gaussiano}
• Ω tiene que ser abierto (matemáticas)
• $\partial\Omega$ cerrado (físico)
• $\partial\Omega$ a superficie orientable

Pl/ Sea $F(x,y,z) = (zx + \sin(x-y), y - \sin(x-y), \sqrt{x^2+y^2} - \frac{z^2}{2} - 2z \cos(x-y))$

Calcular el flujo a través de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

$$\operatorname{div}(F) = (z + \cos(x-y)) + (1 + \cos(x-y)) + (-z - 2\cos(x-y))$$

$$= 1.$$

$$\therefore \iiint_{\Omega} 1 \cdot dV = \frac{2\pi}{3}, \text{ Pero esto ~~no~~ considera la "tapa".}$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA + \iint_{\text{Tapa}} \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \frac{2\pi}{3} ; \text{ Tapa: } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases} \vec{n} = -\vec{k}$$

Parametrización: $\varphi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\tilde{D}} F(\varphi(\rho, \theta)) \cdot \vec{n} dA \\ &= \iint_{\tilde{D}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rho d\rho d\theta \\ &= -\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

P2) Fórmulas de Green: i) $f \in C^1(\Omega)$
 $g \in C^2(\Omega)$
 $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla g \cdot \vec{n}$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f \Delta g dV &= \iint_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} dA - \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dV \\ &= \iint_{\partial\Omega} (f \nabla g) \cdot \vec{n} dA - \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dV \\ \vec{F} &= f \nabla g \end{aligned}$$

Aplicamos Gauss

$$\begin{aligned} \text{C'Div}(\vec{F})? : \text{div}(f \nabla g) &= \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (f \frac{\partial g}{\partial x_i}) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \\ \iiint_{\Omega} f \Delta g dV &= \iint_{\partial\Omega} (f \nabla g) \cdot \vec{n} dA - \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dV \\ &= \iint_{\partial\Omega} \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g dV - \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dV \\ &= \iiint_{\Omega} f \Delta g dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dV &= \iint_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA \\ &= \iint_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} dA - \iint_{\partial\Omega} g \frac{\partial f}{\partial n} dA \\ \text{por den. i) } &= \iiint_{\Omega} f \Delta g + \nabla g \cdot \nabla f dV - \iiint_{\Omega} g \Delta f + \nabla f \cdot \nabla g dV \\ &= \iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dV \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \begin{cases} -\Delta u + u^3 = 0 & \forall x \in \Omega \\ u = 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Dem: la solución de la ecuación ii) $\Rightarrow h \equiv 0$ en Ω

Desarrolla: $\begin{cases} -\Delta h + h^3 = 0 & \forall x \in \Omega \\ h = 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$
 $\Leftrightarrow -h \Delta h + h^4 = 0$
 $\Leftrightarrow h \Delta h = h^4 \quad \int \iiint_{\Omega}$

$$\iiint_{\Omega} h \Delta h = \iiint_{\Omega} h^4 \quad (1); \text{ pero } \dots$$

$$\iiint_{\Omega} h \Delta h = \underbrace{\iint_{\partial\Omega} h \frac{\partial h}{\partial n} dA}_{=0} - \iiint_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla h$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} h^4 d\Omega &= - \iiint_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla h \\ 0 &= \iiint_{\Omega} (h^4 + \underbrace{\nabla h \cdot \nabla h}_{\|\nabla h\|^2}) d\Omega \\ 0 &= \iiint_{\Omega} (h^4 + \|\nabla h\|^2) d\Omega \\ \therefore h^4 &= 0 \Rightarrow h=0. \end{aligned}$$

P3 / Calcular $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ Stokes...

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) &= (z, x, y + e^{-z^2}); \quad \Gamma: \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 &= 2x. \\ (x-1)^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Notemos que Γ es cerrado, por lo que:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z \\ x \\ y + e^{-z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S: \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad r = 2 \cos \theta$$

$$\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ r \end{pmatrix}; \quad \text{Y el vector normal: } \hat{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{n} = r \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{rot}(\vec{F}(\varphi(r, \theta))) \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} \quad \therefore W = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} dr d\theta.$$

5 de Octubre

Ecuación de calor: $u \rightarrow \text{temperature}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

coef. de difusión: $\frac{k}{\rho c}$.

+ Condición inicial $u(x, 0) = \text{dato}$ en $x \in \Omega$.

+ condiciones de borde:

Caso 1: Condiciones de Dirichlet
 $u(x, t) = \text{dato}$ $\forall x \in \partial\Omega$.

Caso 2: Condiciones de Neumann:
 $-k \nabla u(x, t) \cdot \hat{n} = \text{dato}$ $\forall x \in \partial\Omega$.

I. Stokes:

El teorema relaciona la integral de líneas con la de superficie:

Teorema de Stokes:

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y regular a pedregos, cuya borde es una curva cerrada, simple y regular por pedregos.

Sea $\vec{F}: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 , definido sobre un abierto $\mathcal{U}$ (que incluye a S); sea $\vec{n}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define la orientación sobre S . Entonces:

Stokes:

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} dA$$

Ejemplo:

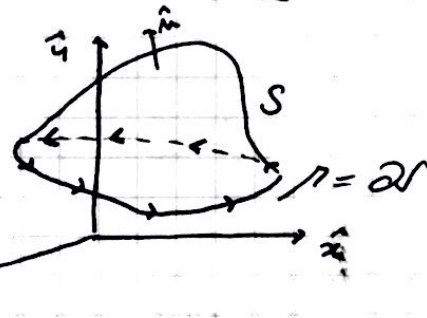
$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x + 4y, 2x + 3y^2, 0)$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = -2\vec{k}.$$

S : Círculo de radio 2 en plano xy .

$$\therefore \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S -2\vec{k} \cdot \vec{k} dA = -2\text{Área} = -8\pi.$$



II Gauss:

Para la divergencia:

Teorema de la Divergencia de Gauss:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedregos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F}: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 sobre un abierto $\mathcal{U}$, donde $\Omega \cup \partial\Omega \subseteq \mathcal{U}$, entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{F}) dV$$

24 de Octubre

Lo fundamental:

en $L^2[a, b]$ el producto interno $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$
 $f \perp g \equiv (f, g) = 0 \Rightarrow L^2[a, b] = \{f \text{ de cuadrado integrado}\}$
 es completo

Si $\{\varphi_n\}$ familia ortogonal total:

$$f = \sum (f, \varphi_n) \varphi_n \quad (\text{Fourier})$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\}_{n=1,2,\dots} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\}_{n=1,2,\dots} \text{ es total en } L^2[-\pi, \pi]$$

$\{ \cos(2x), \dots \}$ es total en $L^2[0, \pi]$

Si $\{\varphi_n\}$ es ortogonal total:

Por ejemplo: $\{1\} \cup \{\cos(nx)\} \cup \{\sin(nx)\}$

$$\varphi_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$$

Se normaliza dividiéndolo por la norma.

$$\begin{aligned} \text{Así: } f &= \sum (f, \varphi_n) \varphi_n \\ &= \sum (f, \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}) \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|} \\ &= \sum \underbrace{\frac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|}}_{\beta_n} \psi_n = \sum \beta_n \psi_n \end{aligned}$$

¿Cómo queda Parseval?

$$f = \sum \beta_n \psi_n = \sum \alpha_n \varphi_n \quad \alpha_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$$

$$= \sum \frac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2} \psi_n$$

$$= \sum \frac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|} \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$$

$$\alpha_n = \frac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|^2} \cdot \frac{\|\psi_n\|}{\|\psi_n\|} = \frac{\|\psi_n\|}{\beta_n}$$

$$\text{Parseval: } \|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \|\psi_n\|^2$$

$$\text{Ejemplo: } f = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad (*)$$

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{4} \cdot 2\pi + \pi \sum (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\|f\|^2 = \pi \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum a_n^2 + b_n^2 \right\}$$

¿Cómo calcular los coeficientes de Fourier para la serie trigonométrica (*)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

en $L^2[-L, L]$.

$$(f(x), 1) = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx = a_0 L$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

$$(f(x), \cos(\frac{n\pi x}{L})) = a_0 \int_{-L}^L \cos^2(\frac{n\pi x}{L}) dx = a_n \cdot L.$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(\frac{n\pi x}{L}) dx \quad \text{analogamente} \dots \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L (\dots) dx.$$

→ separación de variables y ortogonalidad:

$$(EQ) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0, L) \times (0, \infty)$$

$$(CB) \quad \begin{aligned} u(0, t) &= 0 & \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0; & \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= 0 \\ u(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad \text{impedancia}$$

$$(CI) \quad u(x, 0) = f(x)$$

pliegos de calor: $\varphi = -k \nabla u$

$$u(x, t) = \varphi(x) \psi(t) \dots$$

$$\varphi'(x) = \lambda \varphi(x)$$

$$\begin{aligned} \varphi(0) \psi(t) &= 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(L) \psi(t) &= 0 \Rightarrow \varphi'(L) = 0 \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = A \cos(\sqrt{|\lambda|} x) + B \sin(\sqrt{|\lambda|} x)$$

$$\varphi(0) = 0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\varphi'(L) = B \sqrt{|\lambda|} \cos(\sqrt{|\lambda|} L) = 0$$

$$\begin{aligned} \sqrt{|\lambda|} L &= \text{raíz de coseno} \\ &= (2k+1) \frac{\pi}{2} \quad ; \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Obtengo soluciones independientes to mandarlo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} x\right) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

¿Son ortogonales? Podemos calcular $\int_0^L \varphi_m \varphi_n dx$.

$$\lambda_n = -\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)^2$$

$$\begin{cases} \varphi_n''(x) = \lambda_n \varphi_n(x) \\ \varphi_n(0) = 0; \varphi_n(L) = 0 \end{cases} \quad / \times \varphi_m(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^L \varphi_n'' \varphi_m dx = \int_0^L \lambda_n \varphi_n \varphi_m dx$$

$$= \lambda_n (\varphi_n, \varphi_m) = \varphi_n' \varphi_m \Big|_0^L - \int_0^L \varphi_n' \varphi_m' dx \quad \text{integrar por partes} \quad (1)$$

$$\text{también} \quad \int_0^L \varphi_m'' \varphi_n dx = 0 - \int_0^L \varphi_m' \varphi_n' dx \quad (2)$$

¿Cuánto da? teste (1) con (2):

$$0 = (\lambda_n - \lambda_m) \underbrace{\int_0^L \varphi_n \varphi_m dx}_{(\varphi_n, \varphi_m)}$$

$$(\lambda_n - \lambda_m)(\varphi_n, \varphi_m) = 0$$

Luego $n \neq m \Rightarrow \varphi_n \perp \varphi_m$.

$\left\{ \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right) \right\}$ es ortogonal (y es total).

Para $L = \pi$, $\left\{ \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2} x\right) \right\}$ $n = 0, 1, 2, \dots$
es total en $L^2[0, \pi]$

Veremos que $\sin(nx)$, $n = 1, 2, \dots$ es total en $L^2[0, \pi]$

Sea...: sea $f(x) \in L^2[0, \pi]$, tal que:

$$(f(x), \sin((n+\frac{1}{2})x)) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \varphi_n + \varphi_{n-1} &= \sin((n+\frac{1}{2})x) + \sin((n-\frac{1}{2})x) \\ &= 2 \sin(nx) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Es que } \sin(x) + \sin(3) = 2 \sin\left(\frac{4}{2}\right) \cos\left(\frac{4-2}{2}\right)$$

$$(f, \varphi_n + \varphi_{n-1}) = (f, \varphi_n) + (f, \varphi_{n-1})$$

$$= \int_0^\pi f(x) 2 \sin(nx) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) dx.$$

$$\therefore 0 = \int_0^\pi \left[2 f(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \cdot \sin(nx) dx$$

$$\text{Así, } 2f(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \perp \sin(nx)$$

$$\Rightarrow 2f(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Como $\{\sin(nx)\}$ es total, $f(x) \equiv 0$ en $L^2[0, \pi]$

Definición: $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$

Propiedades: $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$
 $e^{ikx} = (e^{ix})^k \quad \forall k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (e^{ix})' &= (\cos(x))' + i(\sin(x))' \\ &= -\sin(x) + i \cos(x) \\ &= i(i \sin(x) + \cos(x)) = i e^{ix}. \end{aligned}$$

Def. $e^{ix} = \cos x + i \sin x \in \mathbb{C}$

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

Ass., $f \in L^2[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= \frac{a_0}{2} e^{i0x} + \sum a_n \frac{(e^{inx} + e^{-inx})}{2} + b_n \frac{(e^{inx} - e^{-inx})}{2i} \\ &= \frac{a_0}{2} e^{i0x} + \sum \frac{(a_n - b_n i)}{2} e^{inx} + \frac{(a_n + b_n i)}{2} e^{-inx} \end{aligned}$$

Ass., $\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$.

sea $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}) = \{f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}\}$.

$$|e^{ix}| = |\cos ix + i \sin ix| = 1$$

Def. $f, g \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$$

así $\|f\|^2 = (f, f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$. $\exists \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ existe.

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Con este producto, se tiene

Cauchy-Schwarz: $\|f + tg\|^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$(f + tg, f + tg) = \|f\|^2 + t^2 \|g\|^2 + (f, tg) + (tg, f)$$

¿cómo proceder?

Obs. $\{e^{ikx}\}$ es sistema ortogonal.

$$(e^{ikx}, e^{imx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \overline{e^{imx}} dx$$

$$k \neq m \Rightarrow = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x} dx = \frac{e^{i(k-m)x}}{i(k-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

y además $(e^{ikx}, e^{ikx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \overline{e^{ikx}} dx$

$$\|e^{ikx}\| = \sqrt{2\pi}$$

extiende: $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$

$$c_k = \frac{(f(x), e^{-ikx})}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

En genl. se pueden usar: $\{e^{\frac{i k \pi}{L} x}, k \in \mathbb{Z}\}$

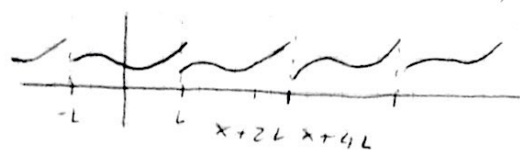
como "base" de $L^2([L, L], \mathbb{C})$

$$\|e^{\frac{i k \pi}{L} x}\| = \sqrt{2L}, \text{ etc.}$$

Transformada de Fourier

La serie de Fourier no permite representar
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (\text{o } \mathbb{C})$
 $\downarrow$
 no acotado

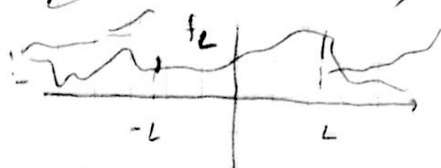
Si f es periódica, periodo $2L$, no hay problema.



$$\text{en } [-L, L]; f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i \frac{k\pi}{L} x}$$

$$f(x) = f(x+2L) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i \frac{k\pi}{L} (x+2L)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{i \frac{k\pi}{L} x} \cdot e^{i 2k\pi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{i \frac{k\pi}{L} x}$$

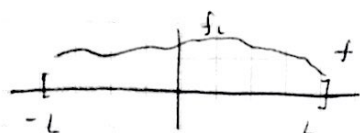
Por periodicidad, la serie coincide con f en todo $\mathbb{R}$.
 ¿3 si no es periódica?



$$f_L(x) = \sum c_k e^{i \frac{k\pi}{L} x} \quad ; \quad c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{k\pi}{L} x} dx$$

Obs. La serie, en $\mathbb{R}$, representa la extensión periódica de f_L .

Si $f(x) = x^2$:



Puede, para cualquier $L > 0$, representarse en forma exacta en $[-L, L]$.

Sea $S_N(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i \frac{k\pi}{L} x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

$\forall x \in [-L, L]$

Si f_L es la versión periódica $2L$, $f_L = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{k\pi}{L} x}$

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{k\pi}{L} x} dx = \frac{(f_L, e^{-i \frac{k\pi}{L} x})}{\|e^{-i \frac{k\pi}{L} x}\|^2}$$

Si hacemos $L \rightarrow \infty$, obtendríamos $f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i \frac{k\pi}{L} y} dy e^{i \frac{k\pi}{L} x}$$

Sea $g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i \omega u} du$

$$g_L(\omega) = \int_{-L}^L f(u) e^{-i \omega u} du \xrightarrow{L \rightarrow \infty} g(\omega)$$

con esto $f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} g(\frac{k\pi}{L}) e^{i \frac{k\pi}{L} x}$

Sea $\omega_k = \frac{k\pi}{L} \quad \dots \quad \omega_{-2} \quad \omega_{-1} \quad \omega_0 = 0 \quad \omega_1 = \frac{\pi}{L} \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{L}$

$$\Delta \omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{\pi}{L} = \Delta \omega$$

$$\frac{1}{2L} \cdot \frac{\pi}{L} = \frac{\Delta \omega}{2\pi}$$

$$L \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta \omega \rightarrow 0$$

Tomando límite: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{i y x} dy$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iuy} du \right\} e^{iyx} dy$$

Def: Dada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}(f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iuy} dy$$

Notación $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$

Y tenemos que la fórmula pasa al teorema.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy \quad \left. \vphantom{\int} \right\} \text{anti transformada}$$

Def. La anti transformada:

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{iyx} dy$$

Y el teorema queda: $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$
o notando

31 de Octubre

Resumen

Def: Transformada de Fourier:

sea $f \in L^1(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty\}$,
definimos:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad \text{como la transf. de Fourier.}$$

Prop. 1) $\hat{f}$ es absolutamente convergente
2) $\mathcal{F}$ es lineal

Ejemplo engañoso. Buscas $\mathcal{F}[\cos(ax)](\omega)$:

Notemos que $\cos(ax) \notin L^1$:

$$\begin{aligned} \cos(ax) &= \frac{1}{2} (e^{iwx} + e^{-iwx}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a-\omega)x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(a+\omega)x} dx \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{i(a-\omega)x}}{i(a-\omega)} + \frac{e^{-i(a+\omega)x}}{i(a+\omega)} \right]_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

Se toma el límite... $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{e^{-i(\omega-a)x}}{-i(\omega-a)} \Big|_{x=-M}^{x=M} \rightarrow ??$

Aún así, existen funciones que no están en $L^1(\mathbb{R})$, cuya transformada se converge.

Def: Inversa de la Transformada de Fourier.

sea $g \in L^1(\mathbb{R})$:

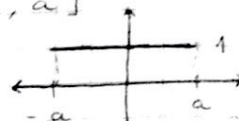
$$\mathcal{F}^{-1}[g](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x} dx.$$

El teorema es:

Teorema. sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces se tiene que

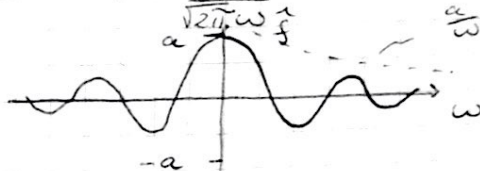
$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)) = f(x)$; donde $\mathcal{F}^{-1}$ es lineal.

Ejemplo: $f(x) = \mathbb{1}_{[-a, a]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$



$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-a, a]}(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right|_{-a}^a \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \omega} (e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \omega} (-2i \sin(\omega a)) = \frac{2 \sin(a\omega)}{\sqrt{2\pi} \omega} \end{aligned}$$

Gráfico de $\hat{f}$:



Notemos que en este ejemplo, $\frac{\sin(a\omega)}{\omega} \notin L^1(\mathbb{R})$

Otro ejemplo: sacar $\mathcal{F}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$

$$\begin{aligned} \text{Se tiene que: } \mathcal{F}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-i\omega x} dx \\ \text{sea } x = -y &\Rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(-y)}{-y} e^{i\omega y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} e^{i\omega y} dy \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{1}_{[-1, 1]} \end{aligned}$$

Propiedades:

$$\begin{aligned} 1) \widehat{f(ax)}[\omega] &= \frac{1}{a} \widehat{f(x)}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{con } a > 0 \\ 2) \widehat{f(ax)}[\omega] &= -\frac{1}{a} \widehat{f(x)}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{con } a < 0 \\ 3) \widehat{f(x-a)}[\omega] &= e^{i\omega a} \widehat{f(x)}[\omega] \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \widehat{f(ax)}[\omega] &= \frac{1}{|a|} \widehat{f(x)}\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned} \right\}$$

Teorema: sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, entonces se tiene:

$$\mathcal{F}(f'(x))[\omega] = i\omega \mathcal{F}(f(x))[\omega]$$

$$\begin{aligned} \text{Demostración: } \widehat{f'(x)}[\omega] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx \quad \begin{matrix} \text{integrar} \\ \text{por partes} \end{matrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-i\omega x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (-i\omega) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\omega x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \end{aligned}$$

Como $f' \in L^1(\mathbb{R})$ y por TFC:

$$f(x) = \int_0^x f'(y) dy + f(0), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} f'(y) dy + f(0)$$

Entonces es correcto, lo cual: $\widehat{f'(x)}[\omega] = i\omega \widehat{f(x)}[\omega]$

Aplicación? Ecuación del calor en barra infinita.

$$(E) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad (I) \quad u(x, 0) = f(x), \quad \text{donde no hay}$$

condiciones de borde de la que es infinita, pero se planteará "(CB)" como: $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall t$
 $\frac{\partial u(\cdot, t)}{\partial x} \in L^1(\mathbb{R})$

Para aplicar la t. de Fourier podemos aplicar en t fijo por w y x .

$$\hat{u}(w, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-iwx} dx$$

Lo aplicamos a la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-iwx} dx = -\alpha w^2 \hat{u}(w, t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\hat{u}(w, t)) = -\alpha w^2 \hat{u}(w, t)$$

Sea $U_w(t) = \hat{u}(w, t)$ entonces:

$$U_w'(t) = -\alpha w^2 U_w(t)$$

entonces:

$$U_w(t) = C e^{-\alpha w^2 t}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(w, t) = C e^{-\alpha w^2 t}$$

Viendo que $C = \hat{f}$, siendo que $u(x, 0) = f(x)$.
 Entonces:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w) e^{-\alpha w^2 t} e^{iwx} dw$$

2 de noviembre

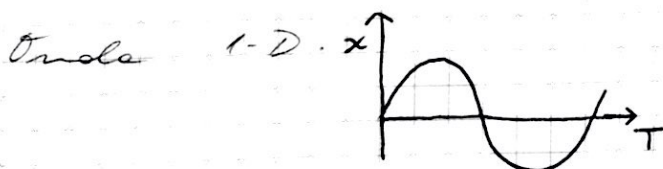
Auxiliar 12

P1) Cuerda vibrante ante pequeños oscilaciones (deformaciones).

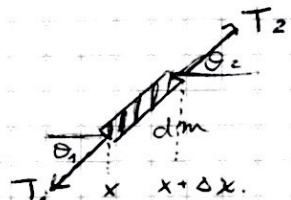
a) Considere una cuerda homogénea de densidad ρ y largo L . Demuestre mediante un balance de fuerzas en un segmento diferencial que la ecuación que modela la situación es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ec. Ecuación de ondas $\rightarrow$



Considerando un elemento dm de cuerda:



Por suma de fuerzas, obtenemos: $\sum F_y = T_2 \sin(\theta_2) - T_1 \sin(\theta_1)$

Si $\theta_i \ll 1$, entonces $\sin(\theta_i) \approx \tan(\theta_i)$ y $T_2 \approx T_1 \approx T_0$

Así:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \overset{m}{dm} = T_0 [\tan(\theta_2) - \tan(\theta_1)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \overset{\rho}{\rho} \Delta x = T_0 \Delta x \frac{[\tan(\theta_2) - \tan(\theta_1)]}{\Delta x}$$

Notar que $\tan(\theta_1) = \frac{du}{dx}(x, t)$ y $\tan(\theta_2) = \frac{du}{dx}(x + \Delta x, t)$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho = T_0 \left(\frac{\frac{du}{dx}(x + \Delta x, t) - \frac{du}{dx}(x, t)}{\Delta x} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow c^2 = \frac{T_0}{\rho}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \blacksquare$$

b) Encuentra la solución de la ecuación para el caso de una cuerda amarrada en 2 extremos, con condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v(x).$$

Caso base: $u(0, t) = u(L, t) = 0.$

Soluciones: $u(x, t) = \phi(x) \Psi(t)$
así

$$\phi''(x) \Psi(t) = \frac{1}{c^2} \phi(x) \Psi''(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = -\lambda \quad \text{y} \quad \frac{\Psi''(t)}{\Psi(t)} = -\lambda c^2$$

si $\lambda = 0 \Rightarrow \phi(x) = ax + b \Rightarrow a = b = 0$; no aporte.

si $\lambda > 0 \Rightarrow \phi''(x) + \lambda \phi(x) = 0$
 $\Rightarrow \phi(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x).$

Por condiciones de borde: $A = 0$ y $\{ (B=0) \vee \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0 \}$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} L = k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad (\text{los naturales no incluyen al } 0)$$

El tiempo queda como: $\Psi(t) = C \cos(c\sqrt{\lambda} t) + D \sin(c\sqrt{\lambda} t).$

Por superposición: $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tilde{A}_k \cos\left(\frac{c k \pi}{L} t\right) + \tilde{B}_k \sin\left(\frac{c k \pi}{L} t\right) \right) \sin\left(\frac{k \pi}{L} x\right)$

Por condiciones de inicio.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \sin\left(\frac{k \pi}{L} x\right)$$

$$\Rightarrow \tilde{A}_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k \pi}{L} x\right) dx$$

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \left(\frac{c k \pi}{L}\right) \sin\left(\frac{c k \pi}{L} t\right)$$

Segunda condición inicial:

$$\text{sea } \tilde{C}_k = \tilde{B}_k \frac{c k \pi}{L} \Rightarrow \tilde{C}_k = \frac{2}{L} \int_0^L v(x) \sin\left(\frac{k \pi}{L} x\right) dx$$

Def: sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$; 2do miembro

$$\begin{aligned}
 f * g &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f(x-y) dy \\
 &= g * f
 \end{aligned}$$

Además, es lineal: $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha (f * g) + \beta (f * h)$.

Teorema: $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$

Observaciones: si g es tal que $\sqrt{2\pi} \hat{g}(\omega) = e^{-\alpha \omega^2} \Rightarrow \hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha \omega^2}$

Entonces $\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega) = \mathcal{F}(f * g)$
 $\Rightarrow u = f * g$

Teoría de las funciones de variable compleja:

$$\begin{aligned}
 f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} & z = x + iy &\rightarrow f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \\
 z &\rightarrow f(z)
 \end{aligned}$$

Distancia entre z_1 y z_2 : $|z_2 - z_1| = \frac{|(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)|}{1} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
 $\text{lím en } \mathbb{C} \Leftrightarrow \text{lím en } \mathbb{R}^2 = \|(x_2 - x_1), (y_2 - y_1)\|_2$

Propiedad: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$: es cont. una sola

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y); \text{ donde } z = x + iy$$

7 de Noviembre

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (\text{en } \mathbb{C})$$

Teorema: f es derivable (en $\mathbb{C}$) en z si f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y además se cumple que: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Así, $u(x, y), v(x, y)$ con derivadas parciales continuas $\Leftrightarrow (u, v)$ es diferenciable

Y se cumple Cauchy-Riemann $\Rightarrow$ es derivable en $\mathbb{C}$.

Definición: f se llama holomorfa en z si es derivable en una vecindad de z .

$\rightarrow f$ es holomorfa en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si es holomorfa en cada $z \in \Omega$

Algunos ejemplos: $f(z) = z^2$; $f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2zh + h^2}{h} = 2z$.

Del teorema se "ve" que:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow u(x, y) = x^2 - y^2; v(x, y) = 2xy$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

Cumple con Cauchy-Riemann: $f'(z) = 2x + 2iy = 2(x + iy) = 2z \checkmark$

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

$$u(x, y) = e^x \cos(y); v(x, y) = e^x \sin(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y); \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y); \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin(y); \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y) = e^x \cdot e^{iy} = e^z$$

Ejercicios: verificar que las derivadas:

$$\cos(z) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}); \sin(z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\cosh(z) = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}); \sinh(z) = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z})$$

Observación: Es fácil probar que si f, g son derivables en z .

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$$

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2} \quad \text{si } g(z) \neq 0$$

Y también: si f es derivable en $g(z)$ y derivable en z :

$$(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

$(e^{iz})' = e^{iz} \cdot i$
 $(e^{-iz})' = e^{-iz} \cdot (-i)$
 $(\cos(z))' = \frac{1}{2i}(ie^{iz} - ie^{-iz})$
 $= \frac{1}{2}(e^{iz} - e^{-iz})$
 $= -\frac{1}{2i}(\dots) = -\sin(z).$

Teorema 1: Si $f'(z) = 0$ en Ω abierto conexo, entonces $f = \text{cte.}$

Dem.: $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$

Por C-R: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Luego $\nabla u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\nabla v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u(x, y) - u(x_0, y_0) = \int \nabla u \, d\vec{r} = 0$

$\Rightarrow u(x, y) = \text{cte.}$ ← gracias a Ω conexo.

Teorema 2: f holomorfa en Ω , con $u, v \in C^2$
 $\Rightarrow \Delta u = 0$ en Ω
 $\Rightarrow \Delta v = 0$ en Ω

Dem.: $\Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right)$
 $= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$ (Schwartz)

Ejemplo: $z^2 = x^2 - 2xyi + y^2$; $\Delta(x^2 - y^2) = 2 - 2 = 0$, $\Delta(-2xy) = 0$.

$f(z) = 2x + y - 4y^4i$ $\Delta v = -4 \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = -4 \neq 0$.
 no es holomorfa

Teorema 3: Si u es armónica en Ω abierto, simplemente conexo.

Entonces existe un v armónico tal que:

$f(z) \equiv u + iv$ es holomorfa.

Cómo se da v ? (C-R) $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$.
 es claro, conocemos ∇v .

Pero, existe algún v tal que su gradiente. $\nabla v = \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$

Si existe, si es conservativo y: $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ $\frac{\partial u}{\partial y}$
 $\Leftrightarrow 0 = \Delta u$ (hipótesis)

Luego si existe v (potencial): $\nabla v = \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$

Existe "potencial" v que cumple C-R y así $f = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa y, es única salvo una cte aditiva.

v se llama, función armónica conjugada de u .

Teorema 4: Si f es holomorfa en Ω abierto (simplemente conexo)

Entonces existe F holomorfa en Ω tal que

$F'(z) = f(z).$

Dem (ejercicio): $f = u + iv$; $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$.

Función Logaritmo Complejo:

Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, en coordenadas polares,

$$z = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = r \cos \theta + i r \sin \theta = r e^{i\theta}$$

Sea todo $z \neq 0$ se escribe $z = |z| e^{i\theta}$ (forma polar)

$$r = |z| \Rightarrow \text{módulo de } z$$

$$\theta \Rightarrow \text{argumento de } z ; \theta = \theta + 2k\pi \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Tomamos a la vez argumento principal: $\theta \in [-\pi, \pi]$
 $\therefore \arg(z) = \theta$.

¿Cómo definimos $\log z$? $w = \log(z) = x + iy$

$$\Leftrightarrow z = e^w, \quad |z| = e^{x\pi} = e^x e^{iy\pi}$$

$$\log(z) = \ln(|z|) + (\arg(z) + 2k\pi)i \quad k \in \mathbb{Z}$$

Def: $\log(z) = \{ \ln|z| + i[\arg(z) + 2k\pi] \}$? de Principio:
 $k \in \mathbb{Z}$
 $\theta = \arg(z) \in [-\pi, \pi]$

$$\arg(z) = \{ \arg(z) + 2k\pi \} \setminus k \in \mathbb{Z}$$

$$\log(z) = \ln(z) + i \arg(z) \rightarrow \text{valor principal del logaritmo}$$

$$\arg: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$$\log: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

¿Es $f(z) \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{C}$ es holomorfo.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial y} - i \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ Las únicas funciones holomorfas en $\mathbb{R}$ son las const., así, $\arg(z)$ no es holomorfo.

Calculamos $f'(z)$, si existe $f(z) = \log(z)$

$$f(z) = \log(z) = \ln(z) + i \arg(z)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i\theta$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$v(x, y) = \theta(x, y) = \arctan(y/x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} ; \frac{\partial v}{\partial x} = \dots = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$\Rightarrow$ Es holomorfo en el primer cuadrante.

Se puede probar, que es holomorfo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$(\log(z))' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{(-y)}{(x^2+y^2)} = \frac{x-iy}{(x^2+y^2)} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{z}$$

Es claro que $e^{\log(z)} = e^{\ln|z| + i\theta + 2k\pi i} = e^{\ln|z|} \cdot e^{i\theta} \cdot e^{2k\pi i} = |z| \cdot e^{i\theta} \cdot 1 \rightarrow \text{forma polar} = z$

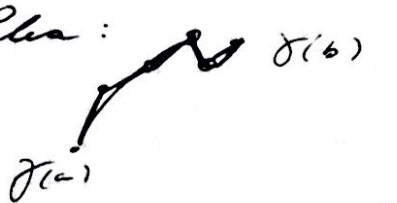
Ponde: $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{\frac{i\theta}{2}(-1)^k}$
 $= \begin{cases} +\sqrt{|z|} e^{i\theta/2} \\ -\sqrt{|z|} e^{i\theta/2} \end{cases}$

Se puede definir $z^w = \exp(w \log(z))$

$i^{-i} = \exp(i \log(i)) = e^{i(\ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$
 $= \frac{1}{\sqrt{e}^{\pi} e^{2k\pi}}$

Integración en $\mathbb{C}$: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

Sea: $\gamma(t) \in \text{Dom}(f)$; $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

$\int f(z) dz \approx \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) \cdot (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$


$\therefore \int f(z) dz \approx \sum_{k=1}^n (u(\gamma(t_k)) + i v(\gamma(t_k))) \cdot (\Delta x_k + i \Delta y_k)$
 $\approx \sum_{k=1}^n u(\gamma(t_k)) \Delta x_k - v(\gamma(t_k)) \Delta y_k + i \sum_{k=1}^n (u(\gamma(t_k)) \Delta y_k + v(\gamma(t_k)) \Delta x_k)$

Tomando límite:

$\longrightarrow \int u dx - v dy + i \int u dy + v dx.$

Y así definir $\int_{\gamma} f(z) dz.$

Propiedades: 1) $\int_{\gamma} [\alpha f(z) + \beta g(z)] dz \rightarrow$ es lineal.

2) $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq \int_{\gamma} |f(z)| dz$

3) Es conservativo: si $f(z) = F'(z)$ entonces $\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Teorema de Cauchy - Goursat:

Sea f holomorfo en Ω abierto simp. conexo y sea $\gamma \in \Omega$ curva regular cerrada, entonces: $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$