MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Martes 23 de Enero

Auxiliar 13: Preparación examen

La última :'(

1. **Series de Potencias**
   Es una serie de la forma $\sum a_n(x-x_0)^n$ en donde a_n es una sucesión de números reales.
   Obs. La serie de Taylor es una serie de potencias centrada en x_0 en que
   $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
2. **Radio de Convergencia**
   Es el máximo valor de $|(x-x_0)|$ tal que la serie de potencias es convergente. La serie entonces converge al menos en el intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$. Es necesario analizar el comportamiento en los extremos de manera individual.
   Se calcula como: $R = \frac{1}{\text{lím sup } \sqrt[n]{a_n}}$
3. **Función definida por serie de potencias**
   Para una serie de potencias que converge en I se puede definir una función $f(x) = \sum a_n x^n$, que resulta ser derivable e integrable en I, operando directamente los términos de la serie.

(**P**1) Encuentre radio e intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

(I) **[Propuesto:**] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n.$

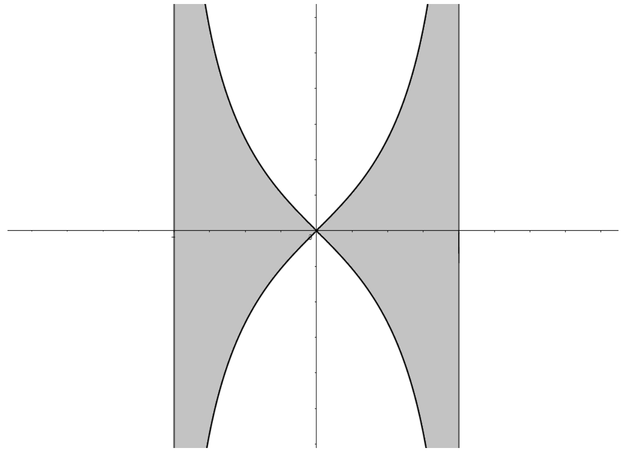
(II) **[Propuesto:**] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n.$

(III) **[Propuesto:**] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{3/2}} x^n.$

(IV) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2})(x-1)^n,$ con $0 < a < b$.

(V) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n}.$

(**P**2) Considere la región encerrada entre la curva $(a^2 - x^2)y^2 = x^2(a^2 + x^2)$ y sus asíntotas, como se muestra en la figura



Demuestre que el área de la región (la parte sombreada) es finita.

(**P**3) El desarrollo en serie para cierta función f es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}.$$

(I) Encuentre el radio e intervalo de convergencia de la serie.

(II) Determine la serie que representa, $f'(x)$, y preséntela con una función conocida.

(III) Determine $f(x)$.

(IV) Utilice lo anterior para calcular el valor de la serie numérica

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

(**P**4) Considere un cono de altura H cuyo ángulo entre una pared y el eje es $\pi/6$, que está relleno de agua. El objetivo del problema será encontrar el mayor radio de una esfera que al ser sumergida hasta el fondo desplace la mayor cantidad de agua fuera del cono.

a) Sea $x_0 \in [-R, R]$. Demuestre que el volumen obtenido al rotar la región $A = \{(x, y) \ : \ x_0 \leq x \leq R, \ 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}$ en torno al eje X es $\frac{\pi}{3}(R - x_0)(2R^2 - Rx_0 - x_0^2)$

b) Muestre que el volumen de fluido desplazado está dado por:

$$V(R) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}R^3 & R < \frac{H}{3} \\ \frac{\pi}{3}(H-R)^2(4R-H) & \frac{H}{3} \leq R \leq \frac{2H}{3} \end{cases}$$

c) Encuentre el máximo de la función V en $[0, 2H/3]$, justificando por qué es el máximo.