MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Jueves 11 de Enero

Pauta P3 y P5 Auxiliar 11: Repaso C3

P1. Calcule el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k\cos^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)$

Sol: Como ya lo hemos echo antes la idea es reconocer una suma de riemman y luego integrar, recordemos que si yo tengo una función integrable (por ejemplo si es continua sobre un cerrado y acotado) la integral de la función está dada por $\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ con $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ la partición del intervalo sobre el que integramos.

¿Y donde quedó el supremo y el ínfimo? Notemos que la suma inferior tiene metido un ínfimo dentro y la superior un supremo, así esta suma (que es la verdadera suma de Riemman) queda justo entre medio de las otras dos, y como sabemos que la función es integrable en el límite la inferior es igual a la superior, y por sandwich concluimos que la suma de Riemman también tiene el valor de la integral.

Vamos al problema entonces, reordenando llegamos a $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi k}{n}\cos^2(\frac{\pi k}{n})\frac{\pi}{n}$, reconocemos la partición $x_k = \frac{\pi k}{n} \Rightarrow x_0 = 0, x_n = \pi, \Delta x_i = \frac{\pi}{n}$ con $f(x) = x\cos^2(x)$. Luego nos queda $\int_0^\pi x\cos^2(x)dx$. Recordando que $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$, llegamos a $\frac{1}{2}\int_0^\pi (x\cos(2x) + x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x\cos(2x)dx + \frac{\pi^2}{4}$, para la otra integral realizamos integración por partes $u = x, du = dx, dv = \cos(2x), v = \frac{\sin(2x)}{2}$ así tenemos que $\int_0^\pi x\cos(2x)dx = \frac{\pi\sin(2\pi)}{2} - 0 - \int_0^\pi \frac{\sin(2x)dx}{2} = \frac{\cos(2\pi)}{4} - \frac{\cos(0)}{4} = 0$. Finalmente se concluye que el límite es $\frac{\pi^2}{4}$.

P2. De la auxiliar anterior sabemos que si consideramos las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$ definidas en $[0,\pi]$, tenemos que:

(I) $g(x) \geq f(x)\ \forall x \in [0,\pi]$

(II) El área de la región encerrada por g y f es $\frac{\pi^3}{6} - 2$.

(III) El volumen de revolución de la región respecto al eje OY es $\frac{\pi^5}{6} - 2\pi^2$.

Utilizando esto calcule la posición del centro de gravedad.

Sol: De las fórmulas del resumen uno deduce que $X_G = \frac{V_{OY}}{2\pi A}$, y que $Y_G = \frac{V_{OX}}{2\pi A}$, con A el área de la curva. Notemos que en este caso el área es el área entre las dos curvas, que ya lo calculamos en la aux anterior, al igual que V_{OY} así es directo que $X_G = \frac{\frac{\pi^4}{12}-\pi}{\frac{\pi^3}{6}-2}$. Para Y_G hay que calcular V_{OX}, la pregunta es si utilizamos $\int_0^\pi (\pi x - x^2)^2 - sen^2(x)dx$ o bien $\int_0^\pi (\pi x - x^2 - sen(x))^2 dx$, piensen que si ustedes quieren calcular el volumen de algún objeto hueco, por ejemplo un cilindro que se le sacó un cilindro lo que uno hace es calcular el volumen total y a ese restarle el otro, por lo que lo correcto es que $Y_G = \frac{\int_0^\pi (\pi x - x^2)^2 - sen^2(x)dx}{2\pi(\frac{\pi^3}{6} - 2)} = \frac{\int_0^\pi (\pi^2 x^2 - 2\pi x^3 + x^4 - \frac{1-cos(2x)}{2}dx}{2\pi(\frac{\pi^3}{6} - 2)} = \frac{\frac{\pi^5}{3} - \frac{2\pi^5}{4} + \frac{\pi^5}{5} - \frac{\pi}{2} + \frac{\sin(2\pi)}{4} - \frac{\sin(0)}{4}}{2\pi(\frac{\pi^3}{6} - 2)} = \frac{\frac{1}{30}\pi(\pi^4 - 15)}{2\pi(\frac{\pi^3}{6} - 2)}$

Observación: Recuerden siempre cuando uno quiere el área entre dos curvas o el volúmen que se genera por el área entre las dos curvas, siempre es área 1 menos área 2, volumen1 - volumen2, ahora es casualidad que en el caso del área y de V_{OY} esto coincide con el área/volumen de la resta. Pero no así en V_{OX}.