MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Jueves 11 de Enero

Sketch of proof Auxiliar 11: Repaso C3

P1. Se dice que una función es T-periódica si $\forall x \;\; f(x+T) = f(x)$.

a) Demuestre que si f es T-periódica entonces f' también lo es.

Sol: Utilizar la definición de derivada y la periodicidad.

b) Encuentre un ejemplo de función no periódica, y cuya derivada si lo sea.

Sol: Considerar $f(x) = \cos(x) + x$ y argumentar por que no puede ser que no puede ocurrir que $f(0) = f(T) \wedge f(\pi) = f(2\pi + T)$ si $T \neq 0$.

c) Si f es una función T-periódica integrable en $[0,T]$, demuestre que $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$$

Indicación: Separe de dos formas distintas $\int_0^{a+T} f(x)dx$

Sol: por un lado separar en a y aparte en T, y demostrar que $\int_T^{T+a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$

d) Suponga que f es una función cuya derivada es T-periódica. Demuestre que f es T-periódica si y sólo si $f(0) = f(T)$.

Sol: Utilizar TFC sobre $f(x+T) - f(x)$ y la parte anterior.

P2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x = 1/2 \\ 0 & x \neq 1/2 \end{cases}$$

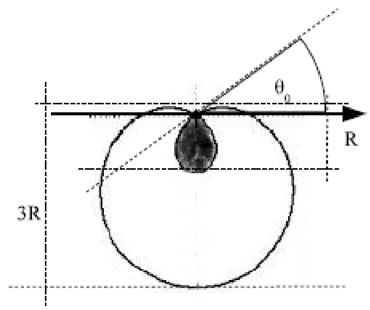
Muestre que f es integrable y calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Sol: Notar que $s(f,P) = 0 \;\forall P$, pues independiente de que intervalo se utilice el ínfimo siempre es 0. Además que $S(f,P) = 2\Delta x_i$ pues hay solo un intervalo cuyo supremo no es 0, así $S(f,P) - s(f,P) = 2\Delta x_i < \epsilon$ tomando por ejemplo una partición que avance cada $\frac{\epsilon}{4}$. Como sabemos que es integrable, el valor de la integral debe ser el límite de la suma inferior es decir 0.

P3. Calcule el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^n k \cos^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)$

Sol: Reordenando llegamos a $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi k}{n} \cos^2(\frac{\pi k}{n})\frac{\pi}{n}$, reconocemos la partición $x_k = \frac{\pi k}{n} \Rightarrow x_0 = 0, x_n = \pi, \Delta x_i = \frac{\pi}{n}$ con $f(x) = x\cos^2(x)$. Luego nos queda $\int_0^\pi x\cos^2(x)dx$. Recordando que $cos^2(x) = \frac{cos(2x)+1}{2}$, se concluye que es $\frac{\pi^2}{4}$.

P4. Dada la cardioide $\rho(\theta) = R - 2R\,\mathrm{sen}(\theta)$, $R > 0$, se pide calcular el área de la región achurada (ver figura).
Indicación: Encontrar θ_0 tal que $\rho(\theta_0) = 0$.



Sol: Primero $\rho(\theta_0) = 0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{6} \vee \pi - \frac{\pi}{6}$. Luego el área se calcula como $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (R - 2Rsen(\theta))^2 d\theta =$ $\dfrac{R^2}{2}\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{6}} (1 - 4\sin(\theta) + 4\frac{1 - cos(2\theta)}{2}) d\theta = ... = \dfrac{R^2}{2}(2\pi - 3\sqrt{3})$

P5. De la auxiliar anterior sabemos que si consideramos las funciones $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$ definidas en $[0, \pi]$, tenemos que:

(I) $g(x) \geq f(x)\ \forall x \in [0, \pi]$

(II) El área de la región encerrada por g y f es $\frac{\pi^3}{6} - 2$.

(III) El volumen de revolución de la región respecto al eje OY es $\frac{\pi^5}{6} - 2\pi^2$.

Utilizando esto calcule la posición del centro de gravedad.

Sol: De la fórmula del resumen es directo que $X_G = \frac{\frac{\pi^4}{12} - \pi}{\frac{\pi^3}{6} - 2}$ y que $Y_G = \frac{\int_0^\pi (\pi x - x^2)^2 - sen^2(x)dx}{\frac{\pi^3}{6} - 2} = \frac{\frac{1}{30}\pi(\pi^4 - 15)}{\frac{\pi^3}{6} - 2}$ Para resolver esta última recordar que $1 - \cos(2x) = 2sen^2(x)$

P6. **[Propuesto:**] Sea f una función continua y biyectiva en $[a, b]$, pruebe que:

$$\int_a^b f^{-1}(x)dx = f^{-1}(b)b - f^{-1}(a)a - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x)dx$$

Sol: Utilizar c.v $y = f^{-1}(x)$ para llegar a $\displaystyle\int_{f^{-1})(a)}^{f^{-1}(b)} yf'(y)dy$ utilizando integración por partes se concluye.

P7. **[Propuesto:**]Utilizando la parte anterior calcule las siguientes integrales:

(I) $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,sen}(x)dx$
Sol: $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

(II) $\int_1^2 \ln(x)dx$
Sol: $2\ln(2) - 1$

(III) $\int_0^1 \arctan(x)dx$
Sol: $\frac{\pi}{4} - \frac{ln(2)}{2}$