MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Martes 9 de Enero

Sketch of proof Auxiliar 9: TFC

P1. Calcule el valor del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} sin(t^2)dt}{1-e^{x^6}}$$

Sabemos que $G'(x) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)' = f(x)$ Luego $G'(x^2) = 2xG'(x)$, considerando $f = sin(x^2)$ y utilizando $L'H$ llegamos a $\frac{1}{3}$.

P2. Sea $G : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{sen(t)}{t}dt$, donde $\frac{sen(t)}{t}$ se define en 0 por continuidad.

Integrando por partes $u = G(x), dv = dx$ y notando que $G(0) = 0$ concluimos.

Demostrar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(t)}{t}dt - 1$$

P3. Demuestre que si f es par entonces $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$
Separamos la integral en el 0 y utilizamos $u = -x$ en la mitad negativa.

P4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Se define $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} (x-t)f(t)dt$. Demuestre que $G''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$G(x) = x\int_x^{x+1} f(t)dt - \int_x^{x+1} tf(t)dt \Rightarrow G'(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt - f(x+1) \Rightarrow G''(x) = f(x+1) - f(x) - f'(x+1) = f'(\xi) - f'(x+1)$ Lo último por TVM. Así como $\xi \leq x+1$ y f' es creciente se concluye.

Indicación: puede ser util usar TVM para derivadas

P5. Sean f, g funciones continuas en $\mathbb{R}$, con f monótona, derivable y con derivada continua. Demuestre que $\exists \xi \in [a,b]$ que satisface

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

Indicación: Defina $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ e integre por partes.

Primero se integra por partes. Recordar que G(a)=0. Luego utilizando TVM para integrales (se puede utilizar pues como f es monótona entonces f' siempre es positiva) y finalmente notando que $\int_a^b g(x)dx = \int_a^\xi g(x)dx + \int_\xi^b g(x)dx$ se concluye.

P6. **[Propuesto 1:**] Sea f es impar, calcule $\int_{-a}^a f(t)dt$

P7. **[Propuesto 2:**] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $x\sin(\pi x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$. Calcule f(4).