MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Martes 2 de Enero

Sketch of proof Auxiliar 7: La integral de Riemann

P1. **[2018!!]**
Dibuje su año nuevo.

No se puede hacer en latex :c

P2. Sea $J_n = \displaystyle\int x^n \operatorname{sen}(x)dx$. Define la formula de recurrencia para I_n.

Integrando por partes dos veces, primero utilizando $u = x^n, dv = \sin(x)$ y luego $u = x^{n-1}, dv = \cos(x)$ se llega a $J_n = -x^n \cos(x) + n(x^{n-1}\sin(x) - (n-1)J_{n-1}) + C$ Finalmente es claro que $J_0 = -cos(x) + C$ y J_1 se calcula utilizando solo la primera integral por partes y se llega a $-xcos(x) + sen(x) + C$

P3. Considere la función $f(x) = x\ln(x)$ en el intervalo $I = [1, 2]$. Dado un $n \geq 0$ consideraremos la partición de I, $\quad P_n = \{1, q, q^2, ..., q^n\}$ en donde $q \in \mathbb{R}$ está fijo.

a) Determine un valor de q de modo que P_n sea efectivamente una partición del intervalo I. Calcule la norma de la misma y muestre que

$$\lim_{n\to\infty} |P_n| = 0$$

Buscamos q que cumpla que $q^n = 2 \Rightarrow q = \sqrt[n]{2}$ Es claro que así cada intervalo es de la forma $[\sqrt[n]{2^i}, \sqrt[n]{2^{i+1}}]$ Que son intervalos disjuntos y que si se unen todos forman $[1, 2]$. Es decir es una partición.
$\Delta x_i = q^i(1 - \frac{1}{q}) \Rightarrow \displaystyle\sup_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i = (1 - \frac{1}{q}) \sup_{i=1,\ldots,n} q^i = (1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}})2 \to 0$

b) Calcule la suma de Riemann $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ en la partición P_n.

Indicación: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kp^k = p\frac{1 - p^n - np^n(1-p)}{(1-p)^2}$

Utilizando propiedades de logaritmo, de la sumatoria y factorizando se concluye que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \frac{q-1}{q}\ln(q)\sum_{i=1}^{n} kq^{2k}$$

. Utilizando la indicación, haciendo un par de simplificaciones y reemplazando se llega a

$$\sqrt[n]{2}\frac{\ln(2)}{n}\left[\frac{4n(\sqrt[n]{4}-1)-3}{(\sqrt[n]{2}+1)(\sqrt[n]{4}-1)}\right]$$

c) Calcule mediante esta suma el valor de la integral $\int_1^2 x\ln(x)dx$

Como la función es Riman Integrable ¿Por qué? basta calcular solo la suma superior, pero sorpresa como la función es creciente ¿Por qué? podemos reemplazar el supremo por evaluar en x_k, es decir se recupera la suma de la parte anterior!. Asi llegamos a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\sqrt[n]{2}\ln(2)}{\sqrt[n]{2}+1} - \frac{3\sqrt[n]{2}\ln(2)}{n(\sqrt{n}2+1)(\sqrt[n]{4}-1)} = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$$

(Para calcular el límite utilizar límite conocido y recordar que $\sqrt[n]{4} = e^{\frac{1}{n}\ln(4)}$

d) Obtenga el valor de la misma integral utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo. Integrando por partes $u = \ln(x), dv = x$ se llega al mismo resultado que antes.

P4. Demuestre que, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)}$$

Simplificamos los factoriales, ingresamos el dividido por n como un n^n y se concluye.

Luego calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.

Tomando exponencial de logaritmo y recordando que $\lim_{n\to\infty} e^{x_n} = e^{\lim_{n\to\infty} x_n}$ y que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, llegamos a estudiar $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$ ¡Que se puede ver como una integral de riemman! específicamente $\int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln(2) - 1$. Luego, reemplazando, el límite que nos interesaba era $\frac{4}{e}$

P5. Sea f definida y acotada en $[a,b]$, Riemann integrable tal que $(\forall x \in [a,b])\ f(x) \geq 0$. Pruebe que f^2 es Riemann integrable en $[a,b]$.

$S(f^2,P) - s(f^2,P) = \sum_{i=1}^{n}(\sup(f^2) - \inf(f^2))\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(\sup(f)^2 - \inf(f)^2)\Delta x_i$ (¿Por qué? eso no ocurre siempre)$= \sum_{i=1}^{n}(\sup(f) - \inf(f))\Delta x_i(\sup(f) + \inf(f)) \leq (S(f,P) - s(f,P))2M$ (¿Quién es M?) $\leq \epsilon$ (Tomando la partición correcta, pues f es integrable ¿qué partición hay que tomar?).

P6. [Propuesto 1:] Sea $K_n = \int \cos(x)^n dx$. Define la formula de recurrencia para K_n.

P7. [Propuesto 2:] Calcule $\int_a^b e^x dx$ utilizando una partición equiespaciada.

P8. [Propuesto 3:] Calcule: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}(\frac{2k\pi}{n})}{n}$.