MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Jueves 28 de Diciembre

Sketch of proof Auxiliar 5: Optimización y Polinomio de Taylor

- Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ k-veces derivable en $\overline{x} \in (a, b)$, y sea

$$T_f^k(h) := f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + \frac{f''(\overline{x})}{2}h^2 + \cdots + \frac{f[k](\overline{x})}{k!}h^k$$

Su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\overline{x}$. Entonces

$$f(x) = T_f^k(h) + o((x - \overline{x})^k)$$

con $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{o(h^k)}{h^k} = 0$

- **[Punto critico]** Diremos que x_* es punto critico de una función diferenciable f si se cumple que $f'(x_*) = 0$.

- Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, k-veces derivable en $\overline{x} \in (a, b)$, con $f'(\overline{x}) = \cdots = f^{[k-1]}(\overline{x}) = 0$ y $f^{[k]} \neq 0$, $k \geq 2$. Entonces hay 3 casos posibles:

  I Si k es par y $f^{[k]}(\overline{x}) > 0$, entonces $\overline{x}$ es un minimo local

  II Si k es par y $f^{[k]}(\overline{x}) < 0$, entonces $\overline{x}$ es un maximo local

  III Si k es impar, $\overline{x}$ es un punto de inflexión, es decir, es un punto en donde la función cambia su concavidad

- Sea $x_0 \in (a, b)$ y $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función de C^2. Si $f'(x_0) = 0$, existen 3 posibilidades:

  I $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es mínimo local.

  II $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es máximo local.

  III $f'''(x_0) \neq 0$ se puede concluir que x_0 es un punto de inflexión.)

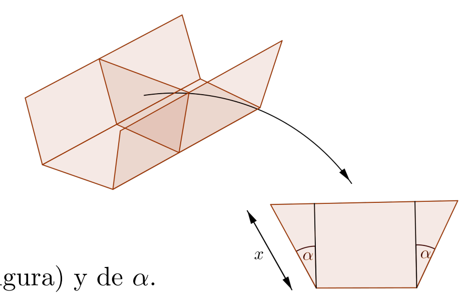
- **[Error $o(\cdot)$ en Desarrollo de Taylor]**
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a, b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de taylor de orden k en $\overline{x} \in (a, b)$. Entonces, para todo $x > \overline{x}$ (respectivamente $x < \overline{x}$) existe $\xi \in (\overline{x}, x)$ (respectivamente $\xi \in (x, \overline{x})$ tal que:

$$f(x) = T_f^k(x - \overline{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x - \overline{x})^{k+1}$$

Es decir, se encontró una expresión para el error $o(\cdot)$

P1. [Optimizando en más de una variable]

Una lamina de zinc de ancho l es plegada para obtener una canaleta trapezoidal . De desea determinar los valores de $x \in [0, \frac{l}{2}]$ y $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ para los cuales el área transversal de la canaleta es máxima.



(a) Determinar el área del trapecio en función de x (como en la figura) y de α.

Utilizando trigonometría básica y recordando que el ancho es l se deduce que el área está dado por $x^2 sen(\alpha)cos(\alpha) + (l - 2x)xcos(\alpha)$.

(b) Para cada $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ encontrar el largo $\bar{x}$ que maximiza el área del trapecio y probar que dicha área viene dada por $\frac{l^2 \cos(\alpha)}{4(2-\operatorname{sen}(\alpha))}$.

Derivar con respecto a x (asumiendo α constante) e igualar a cero, despejar y notar que $cos(\alpha) \neq 0$ pues si eso ocurriese entonces la figura sería una linea en vez de un trapecio.

(c) Encontrar el angulo $\bar{\alpha}$ que maximiza el área obtenida en el parte anterior. Concluya.

Derivando con respecto a α la expresión anterior, igualando a cero y despejando se llega a que el óptimo es $\alpha = \frac{\pi}{6}$, luego reemplazando $\overline{x} = \frac{l}{3}$.

(d) Discuta por que podría no ser este el óptimo.

Esta es una pregunta netamente para comentar no se espera ninguna respuesta técnica, pero tiene que ver con que estamos moviendo primero x y luego α, no los dos al mismo tiempo. Esto lo estudiarán en profundidad en CVV.

P2. [Aproximando el logaritmo]
Aproximar la función $f(x) = x\ln(1+x)$ por un polinomio de Taylor de grado 3 en torno a 0 y estimar el error que se comete al calcular el valor de $\ln(\sqrt{\frac{3}{2}})$ utilizando esta aproximación.

Calcular $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f'''(0)x^3}{3}$ y llegar a $x - \frac{x^2}{2}$. Notar que $ln(\sqrt{\frac{3}{2}}) = f(\frac{1}{2})$, luego el error estará dado por $\frac{1}{4!}\left(\frac{2}{(1+\xi)^3} + \frac{6}{(1+\xi)^4}\right)x^4$ con $\xi \in (0, \frac{1}{2})$, como es decreciente con respecto a ξ entonces la cota sería evaluándolo en $\frac{1}{2}$.

P3. [La función coseno]

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. que verifica que $f + f'' = 0$.

a) Muestre que la función es n veces derivable $\forall n \in \mathbb{N}$.
Utilizar la ecuación y deducir que $f^{(n)} \in \{f, f', -f, -f'\}$. Para ello se recomienda calcular f''', f^{IV}, f^{V}.

b) Si se sabe que $f(0) = f'(0) = 0$, pruebe que f debe ser la función nula.
Utilizando taylor sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x) = f(0) + f'(0)x + ... + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!}$ (por la parte anterior y que $f(0) = f'(0)$, y como $\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (el factorial le gana a la exponencial, y $f^{(n+1)}(\xi) \leq \max\{f(\xi), -f(\xi), f'(\xi), -f'(\xi)\}$) se concluye.

P4. [Un polinomio]
Considere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$$

a) Demuestre que $\exists! x_0 \in [0, 1]$ tal que es raíz de h.
Utilizar TVI y demostrar que la función es estrictamente creciente.

b) Sea $\overline{x} = 0$ ¿Es mínimo, máximo o punto de inflexión?
Es punto de inflexión pues la primera derivada no nula en 0 es la tercera.