MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Martes 2 de Enero

Auxiliar 7: La integral de Riemann

- Sea $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. El conjunto $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una *partición del intervalo* $[a, b]$ si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Diremos que la norma de la partición P es:
$$|P| = \sup_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Delta x_i$$
donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y denotamos al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ como $\mathcal{P}_{[a,b]}$.
Importante: notar que $(x_i - x_{i-1}) \leq |P|$
- Sea $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definimos su suma superior e inferior como:
$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$
donde $M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $m_i(f) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
- Si $P, Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y $P \subseteq Q$ tenemos que:
$$s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P)$$
- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definimos su integral superior e inferior como:
$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \text{ínf}_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} S(f, P)$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} s(f, P)$$
- Diremos que una función es Riemann-Integrable (o simplemente integrable) si su integral superior e inferior coinciden. En dicho caso definimos la integral como:
$$\int_a^b f(x) = \overline{\int_a^b} f(x) = \underline{\int_a^b} f(x)$$
- **Criterio de Riemann:** f es integrable si y sólo si:
$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}, S(f, P) - s(f, P) \leq \varepsilon$$
- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada y monótona, entonces es integrable en $[a, b]$.
- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable en $[a, b]$.
- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua o acotada y monótona, entonces:
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{|P| \to 0} s(f, P) = \lim_{|P| \to 0} S(f, P)$$
$$= \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$
Donde $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
- Dos particiones comunes son la equiespaciada:
$$x_i = x_0 + i\Delta x = a + i\frac{b-a}{n}$$
y la geométrica: $x_i = aq^i = a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^i$.
- Propiedades de la integral
  - $\int_a^b c = c(b - a)$
  - $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ si $f(x) \leq g(x)$ en todo $[a, b]$
  - $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$
- **Segundo TFC:** Si f es integrable en $[a, b]$ y existe una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $F' = f$ en (a, b). Entonces: $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

P1. **[2018!!]**
Dibuje su año nuevo.

P2. Sea $J_n = \displaystyle\int x^n \operatorname{sen}(x) dx$. Define la formula de recurrencia para I_n.

P3. Considere la función $f(x) = x\ln(x)$ en el intervalo $I = [1,2]$. Dado un $n \geq 0$ consideraremos la partición de I, $P_n = \{1, q, q^2, ..., q^n\}$ en donde $q \in \mathbb{R}$ está fijo.

a) Determine un valor de q de modo que P_n sea efectivamente una partición del intervalo I. Calcule la norma de la misma y muestre que

$$\lim_{n\to\infty} |P_n| = 0$$

b) Calcule la suma de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ en la partición P_n.

Indicación: $\sum_{k=1}^{n} kp^k = p\dfrac{1-p^n-np^n(1-p)}{(1-p)^2}$

c) Calcule mediante esta suma el valor de la integral $\int_1^2 x\ln(x)dx$

d) Obtenga el valor de la misma integral utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo.

P4. Demuestre que, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)}$$

Luego calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.

P5. Sea f definida y acotada en $[a,b]$, Riemann integrable tal que $(\forall x \in [a,b])\ f(x) \geq 0$. Pruebe que f^2 es Riemann integrable en $[a,b]$.

P6. **[Propuesto 1:]** Sea $K_n = \int \cos(x)^n dx$. Define la formula de recurrencia para K_n.

P7. **[Propuesto 2:]** Calcule $\int_a^b e^x dx$ utilizando una partición equiespaciada.

P8. **[Propuesto 3:]** Calcule: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{sen}(\frac{2k\pi}{n})}{n}$.