P4 | Para resolver esto es necesario recordar varias cosas.

1.- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = c_1 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 \ \forall x : |x| > M$
$|f(x) - c_1| < \varepsilon$

Esto lo que nos dice es, dame cualquier épsilon, si tu quieres que $f(x)$ y c_1 estén a esa distancia es solo cosa de esperar, a partir de un M se va a cumplir.

2.- $\forall x, y, z \quad |x - z| \leq |x - y| + |y - z|$
Llegar de un punto a otro siempre es mas corto que pasar por un tercero en el camino.

3.- f es unif continua si
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Vamos con el problema:
Como se tiene informacion cuando $x \to \pm\infty$ vamos a separar $\mathbb{R}$ en $(-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$ y veremos que en ambos casos es unif. continua.

Caso $[0, +\infty)$:

De (1) sabemos que $\exists M > 0$ tq
$\forall x : x > M \Rightarrow |f(x) - c_1| < \varepsilon/2$ ← recuerden que poner ε es lo mismo que poner cualquier cosa que se vaya a 0.

Luego $[0,+\infty) = [0,M] \cup (M,+\infty)$

Como $[0,M]$ es cerrado y acotado

$\Rightarrow f:[0,M] \to \mathbb{R}$ es unif. continua.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad |x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Además $\forall x,y : |x| > M$ y $|y| > M$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq |f(x)-c_1| + |f(x)-c_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Notemos que esto está casi listo,

tenemos el caso
- $x,y \in [0,M]$
- $x,y \in [M,+\infty)$

pero falta $x \in [0,M]$, $y \in (M,+\infty)$

El problema es que ahí es falso que
$|f(x)-c_1| < \varepsilon$ (pues $x < M$) por lo que
hay que enfrentarlo distino y nos vamos
aprovechar de que $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ por lo que
es uniformemente continua, y no
NOS VAMOS a arrepentir,
vamos a trabajar en $[0,M] \cup (M,+\infty)$
sino que en $[0,M+1] \cup (M+1,+\infty)$
así si $x,y \in [0,M+1] \wedge x,y \in (M+1,+\infty)$
estamos listos argumentando exactamente
lo mismo que antes. $(M+1 > M)$
y si $x \in [0,M+1]$, $y \in (M+1,+\infty)$

$\Rightarrow |x-y| < \delta \Rightarrow x \in [M,M+1]$ (pues el δ es chico)

$\Rightarrow |x| > M \quad \wedge \quad |y| > M+1 > M$

y concluimos igual que como se explicó antes.

Para el caso negativo es exactamente igual así llegamos a que

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 \quad \forall x, y \in (0, +\infty) \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 \quad \forall x, y \in (-\infty, 0] \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_3 \quad x \in [0, +\infty), \ y \in (-\infty, 0] \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
  ($f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, unif. continua)

tomando $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$

Se concluye el ejercicio //

b) Para este es importante recordar que si I es un intervalo y f es continua $\Rightarrow f(I)$ es un intervalo

Así razonando como antes...

Sea x_n una sucesión, necesariamente $\exists x_{n_p}$ tq x_{n_p} siempre es positiva, o siempre es negativa, o siempre es nula.

<u>Caso 1:</u> Si siempre es nula

$\Rightarrow f(x_{n_p}) = f(0)$

$\Rightarrow f(x_{n_p})$ es convergente.

Caso 2: x_{n_φ} siempre positiva

Como $[0,+\infty) = [0,M] \cup (M,+\infty)$

también hay 2 casos

$\exists\, x_{n_{\varphi_2}}$ que siempre está en $[0,M]$

o bien siempre está en $(M,+\infty)$

Caso 2.1: si $x_{n_{\varphi_2}} \in [0,M]$

es acotada $\overset{B-W}{\Longrightarrow}$ tiene subsucesion convergente

llamémosla $x_{g(n)} \longrightarrow \bar{x}$

y como f es continua

$$f(x_{g(n)}) \longrightarrow f(\bar{x}) \quad //$$

Caso 2.2: si $x_{n_{\varphi_2}} \in (M,+\infty)$

$\Rightarrow |f(x_{n_{\varphi_2}}) - c_1| < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow -\varepsilon + c_1 \leq f(x_{n_{\varphi_2}}) \leq \varepsilon + c_1$

$\therefore |f(x_{n_{\varphi_2}})| \leq \max\{|\varepsilon + c_1|, |-\varepsilon + c_1|\}$

es acotada!

$\overset{W-B}{\Longrightarrow} \exists\, x_{g(n)}$ tq $f(x_{g(n)})$ es convergente //

Caso 3: Análogo.