MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Martes 12 de Diciembre

Auxiliar 1: Continuidad

- Una **sucesión** es una función

$$s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto s(n) = s_n$$

- $s_n \to \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |s_n - \ell| \leq \varepsilon$
- (s_n) se dirá acotada si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$
- Sea (s_n) una sucesión y sea $\varphi : N \to N$ una función *estrictamente creciente*. Se llama **subsucesión** de s_n generada por φ, a la sucesión $s_{\varphi(n)}$
- Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces

$$s_n \to \ell \Leftrightarrow \textit{Todas las subsucesiones de } (s_n) \textit{ convergen a } \ell$$

- **Teorema de Bolzano - Weiestrass**
Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergete
- **Función continua en un punto**
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. Diremos que f es una **función continua** en $\overline{x}$ si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \overline{x} \Longrightarrow f(x_n) \to f(\overline{x})$$

- **Caracerización $\varepsilon - \delta$**
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. f es continua en $\overline{x}$ si y solo si se cumple que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$

$$\{|x - \overline{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| \leq \varepsilon\}$$

- **Álgebra de funciones continuas**
Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en $\overline{x} \in A \cap B$. Luego $f \pm g, \lambda f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ con $g(\overline{x}) \neq 0$. Además la composición de continuas es continua
- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \overline{x} \in A$, diremos que f es continua.

P1. **[Grafo cerrado]** Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y sea (a_n) una sucesión en $[a, b]$ tal que $f(a_n)$ converge a $\overline{y}$.

- ¿Es cierto que x_n es convergente?
- Demuestre que existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{y}$.
- ¿Qué ocurre si cambiamos $[a, b]$ por $\mathbb{R}$?

P2. **[Una función dominada]** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- Calcule $f(0)$ y demuestre que es continua en 0.
- ¿Podríamos concluir algo si solo sabemos que $f(x) \leq x$?

P3. **[Subsucesiones convergentes]** Sea x_n una sucesión tal que las subsucesiones x_{2n}, x_{2n+1} y x_{3n} son convergentes. Demuestre que x_n es convergente.

P4. **[Función por partes]** Sea $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ y $b \in \mathbb{R}$. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin((1-a)x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ b(x-a)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sin(a(x-1))}{\log(x)} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

b) ¿Que condiciones deben satisfacer a y b para que f sea continua en 0?

c) ¿Que condiciones deben satisfacer a y b para que f sea continua en 1?

d) ¿Que condiciones deben satisfacer a y b para que f sea continua?

P5. **[Sucesiones no convergentes]** Pruebe que las siguientes sucesiones no convergen:

a) $u_n = sen\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)$

b) $v_n = \left(-1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

P6. **[Propuesto 1: Una función Lipschitz]** Una función se denomina función de Lipschitz, si cumple con:

$$\exists L > 0,\ \forall x, y \in Dom(f),\ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Demuestre que si f es Lipschitz, entonces es continua

P7. **[Propuesto 2:** Suponga que f y g son funciones tales que g es continua en 0, $g(0) = 0$, y $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo x. Demuestre que f es continua en 0.