MA1002-1 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Matías Godoy
Auxiliar: Cristóbal Valenzuela

Auxiliar 12 : Series

22 de Enero del 2018

Recuerdo:

- Una sucesión (x_n) se dirá de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N, \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$

- Una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.
- Sea (a_n) una sucesión. Luego $\sum a_k$ converge si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N,\ m > n \implies \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

- Si $\sum a_k$ converge, entonces $a_n \to 0$.
- Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces la siguiente suma converge:

$$\sum (a_k + \lambda b_k) = \sum a_k + \lambda \sum b_k$$

- Sea (a_k) una sucesión no negativa. Tenemos que $\sum a_k$ converge si y sólo si $\sum a_k < M$ para algún M.
- **Comparación:** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones no negativas de manera que existe n_0 y $\alpha > 0$ tales que, para todo $n \geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k < \infty$, entonces $\sum a_k < \infty$.
- **Comparación por Cuociente:** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones positivas tales que $c = \lim \frac{a_n}{b_n}$ existe.
  1. Si $c = 0$ y $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.
  2. Si $c > 0$, $\sum b_k$ converge si y sólo si $\sum a_k$ converge.
- **Criterio del Cuociente:** Sea (a_n) una sucesión tal que $r = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe.
  1. Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
  2. Si $r > 1$ entonces $\sum a_k$ diverge.
- **Criterio de la Raíz:** Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos tal que $r = \lim (a_n)^{1/n}$ existe.
  1. Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
  2. Si $r > 1$ entonces $\sum a_k$ diverge.

  Obs: En este criterio se puede reemplazar r por $r = \limsup_n a_n = \lim_n \sup\{a_k : k \geq n\}$
- **Criterio de la Integral:** Sea $k \in \mathbb{N}$ y $f : [k, \infty) \to \mathbb{R}_+$ una función decreciente. Se tiene que $\sum_{n \geq k} f(n)$ converge si y sólo si $\int_k^\infty f(x)dx$ converge.
- Sea (a_k) una sucesión. Diremos que $\sum a_k$ es absolutamente convergente si $\sum |a_k|$ converge.
- Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además una serie es absolutamente converge si y sólo si la series de sus términos negativos y la de sus términos positivos convergen.
- Si una serie converge, pero no converge absolutamente se le dirá condicionalmente convergente.
- **Criterio de Leibnitz:** Sea (a_n) una sucesión decreciente tal que $a_n \to 0$. Entonces $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.
- Sea (a_k) una sucesión. Si $\sum |a_k|$ converge, luego cualquier reenumeración (b_k) verifica que $\sum b_k = \sum a_k$ converge.
- Sea (a_k) tal que $\sum a_k$ es condicionalmente convergente. Luego para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existe una reenumeración b_n tal que $\sum b_k = \alpha$.
- Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series absolutamente convergentes, entonces su producto es $\sum c_k$, donde (c_k) es cualquier sucesión que contiene exactamente una vez cada producto posible. En particular podemos tomar $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$.

P1. [Varios]

Determine si la siguientes series convergen o divergen:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^3 \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(n^2\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]\right)^n$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}-1}{n} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(e^n)}{\sqrt{n^4+\ln n}} \qquad g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n}{(n+\pi)^2}\right) \qquad h)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}$$

P2. [Nuevas convergencias]

Sea (a_n) y (b_n) dos sucesiones.

a) Demuestre que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum \sin(a_n)$ converge.

b) Demuestre que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n^2$ converge absolutamente.

c) Demuestre que si $\sum a_n^2$ y $\sum b_n^2$ convergen, entonces $\sum a_n b_n$ converge.
Hint: *Puede usar que si x, y son vectores $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$*

d) Demuestre que si $\sum a_n^2$ converge, entonces $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ converge para todo $\alpha > \frac{1}{2}$.

P3.

a) Demuestre que $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\ln n)^k}$ diverge $\forall k \in \mathbb{N}_+$.

b) Demuestre que $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\ln n)^n}$ converge.

c) Demuestre que $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{e^y}{y^y}$ converge.

d) Demuestre que $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ converge.
Hint: *Use la parte c)*

e) Demuestre que: $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$ diverge.

P4. [P2 *a*), *b*) y *c*) Examen, Año 2016]

a) Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1}\ln(1+1/n^2)$.

b) Demuestre que si $\sum a_n^2$ converge, entonces $\sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ también.

c) Determine los valores de $x \in \mathbb{R}$ tal que la serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n x^n$ converge.

P5.

a) Sea $a > 0$ y $a \neq 4$. Determine si la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,a^n}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n+1)}$$

es divergente o convergente. Justifique su respuesta.

b) Sea $a \in \mathbb{R}$ y considere la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n(n+2)}$$

1) Determine para que valores de a la serie es convergente. Justifique su respuesta.
2) Calcule el valor de la serie para el caso $a = 1$.