

P2 | b) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C'([0, 1])$, $f(0) = 0$ y $f'(x) > 0 \ \forall x \in [0, 1]$

Entonces $\exists m, M$ tq: $m \cdot x \leq f(x) \leq M \cdot x$.

Sol. La idea es usar TVM, dado $x \in [0, 1]$, apliquemoslo en $[0, x]$:
(arbit.)

$$\Rightarrow \exists \xi_x \in (0, x): \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi_x) \Leftrightarrow f(x) = f'(\xi_x) \cdot x. \quad (*) \quad (+0,5) \text{ TVM apropiado.}$$

Ahora, como $f \in C'([0, 1]) \Rightarrow f'$ es cont. en $[0, 1] \Rightarrow$ alcanza máx y mín en $[0, 1]$

$$\text{ie. } \exists m, M \text{ tq } m \leq f'(\eta) \leq M \ \forall \eta \in [0, 1] \quad (+0,5) \text{ cotas p/ } f'(\eta)$$

Así, usando esto en (*) (notar que ξ_x dep. de x , luego es nec. la cota de f')
 $\forall \eta \in [0, 1]$

$$m \cdot x \leq f(x) = f'(\xi_x) \cdot x \leq M \cdot x \quad (+0,5) \text{ conclusión.}$$

que es lo pedido.

Obs. Como $f'(x) > 0 \ \forall x$, necesariamente $m > 0$. (no se pedía).

P3) a) $I_n := \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx$. Pdg $(1+2n)I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - 2nI_{n-1}$,

Como siempre, hay que integrar por partes:

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx = \int \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{x^n} \underset{\substack{\uparrow \\ g'}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} dx \quad \text{Como } f = x^n \Rightarrow f' = nx^{n-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} g' = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow g = 2\sqrt{1+x} \end{array} \right. \quad (+1,0)$$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } I_n &= f \cdot g - \int f' \cdot g = 2\sqrt{1+x} x^n - \int nx^{n-1} \cdot 2\sqrt{1+x} dx \\ &= \underbrace{2x^n\sqrt{1+x}}_{\text{justo lo pedido}} - 2n \underbrace{\int x^{n-1} \sqrt{1+x} dx}_{\text{algo no calza... hay que "ajustarlo"}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (+0.5)$$

notar que $x^{n-1} \sqrt{1+x} = x^{n-1} \sqrt{1+x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} = x^{n-1} \frac{(1+x)}{\sqrt{1+x}} = \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x}} + \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (+0.5)$

$$\therefore \int x^{n-1} \sqrt{1+x} dx = \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x}} + \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx = \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x}} dx + \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$\begin{aligned} \text{y luego: } I_n &= 2x^n\sqrt{1+x} - 2n \underbrace{\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x}} dx}_{I_{n-1}} - 2n \underbrace{\int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx}_{I_n} \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. (+1,0) \\ I_n &= 2x^n\sqrt{1+x} - 2nI_{n-1} - 2nI_n \\ \therefore (1+2n)I_n &= 2x^n\sqrt{1+x} - 2nI_{n-1} \quad \text{lo pedido} \end{aligned}$$

b) $\int \frac{1}{3-5\sin x} dx$. Claramente se debe usar el cv $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

en tal caso: $\frac{2}{1+u^2} du = dx$ y $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, luego:

$$\int \frac{1}{3-5\sin x} dx = \int \frac{\frac{2}{1+u^2} du}{3-5\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)} = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{\frac{3+3u^2-10u}{1+u^2}} du = \int \frac{2}{3u^2-10u+3} du \quad (+1,0 \text{ hasta acá}) \uparrow$$

Para obtener la primitiva se debe descomponer en fracciones parciales.
para ello, primero factoricemos el polin. $3u^2-10u+3$:

Siguemos sus raíces: $u_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6}$
 $= \frac{10 \pm 8}{6} \quad \begin{matrix} \swarrow u_1 = 3 \\ \searrow u_2 = \frac{1}{3} \end{matrix}$

° $3u^2-10u+3 = 3\left(u-\frac{1}{3}\right)(u-3) = (3u-1)(u-3) \leftarrow (+0,5)$

Así: $\int \frac{2}{3u^2-10u+3} du = 2 \int \frac{du}{(3u-1)(u-3)} = 2 \left[\int \left(\frac{A}{3u-1} + \frac{B}{u-3} \right) du \right]$
 $= 2 \left[\int \frac{Au-3A+3Bu-B}{(3u-1)(u-3)} du \right] = 2 \int \frac{du}{(3u-1)(u-3)}$

° $A+3B=0 \wedge -3A-B=1 \Rightarrow B=-3A-1$
 $\Rightarrow A+3(-3A-1)=0$

$-8A=3 \Rightarrow \begin{cases} A = -3/8 \\ B = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8} \end{cases} \left(\begin{matrix} +0,5 \\ A \text{ y } B \end{matrix} \right)$

y así: $\int \frac{2}{3u^2-10u+3} du = 2 \left[-\frac{3}{8} \int \frac{du}{3u-1} + \frac{1}{8} \int \frac{du}{u-3} \right]$

$= 2 \left[-\frac{1}{8} \int \frac{du}{u-\frac{1}{3}} + \frac{1}{8} \ln|u-3| \right] + C = 2 \left[-\frac{1}{8} \ln|u-\frac{1}{3}| + \frac{1}{8} \ln|u-3| \right] + C$

$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{u-3}{u-\frac{1}{3}} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 3}{\tan \frac{x}{2} - \frac{1}{3}} \right| + C \quad (+1,0) \text{ calculos finales.}$