Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Diferencial e Integral 2017-3

Control 2

P1) Considere la función $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2\arctan(x^2)$.

a) Determine el dominio de f, sus ceros, signos, paridad, el conjunto donde es continua y donde es derivable, determine finalmente, justificando, el máximo $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que $f \in \mathcal{C}^k(\mathrm{Dom}(f))$.

b) Calcule f', determine puntos críticos, analice intervalos de crecimiento.

c) Calcule f'', analice intervalos de concavidad-convexidad y caracterice los puntos críticos obtenidos en la parte anterior.

d) Bosqueje un gráfico aproximado de f utilizando la información obtenida en los puntos anteriores.

P2)

a) (3.0 ptos.) En una fábrica se requiere construir un estánque para residuos líquidos a altas temperaturas. Para ello, se posee una lámina cuadrada de un material particularmente resistente al calor de lado ℓ, esta debe cortarse apropiadamente para dar lugar a un paralelepípedo recto.
Se le pide a usted, como experto, determinar cuanto debe cortarse en cada esquina de la lámina de modo tal de poder construir el estánque maximizando el volumen disponible para depositar los residuos. Para ello, analice completamente la función $V(x)$ asociada al volumen obtenido al cortar un cuadrado de lado x en cada esquina de la lámina (de modo de poder construir el recipiente deseado).

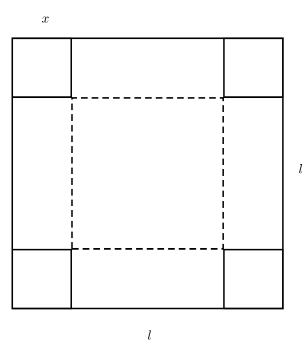

Figura 1: Lámina y cortes necesarios

b) (1.5 ptos.) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1([0,1])$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(x) > 0 \ \forall x \in [0,1]$. Pruebe que existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que:

$$mx \leq f(x) \leq Mx, \ \forall x \in [0,1]$$

c) (1.5 ptos.) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x}$$

P3)

a) (3.0 ptos.) Definamos, para $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx$. Pruebe que para $n \geq 1$:

$$(1+2n)I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - 2nI_{n-1}.$$

b) (3.0 ptos.) Determine

$$\int \frac{1}{3 - 5\sin x} dx$$

Tiempo: 3 horas.