U. DE CHILE

INGENIERIA

Escuela de Ingeniería. FCFM-U. de Chile.
CALCULO MA–12A
Guía de Problemas No. 6, 2003

Integrales impropias, series y sucesiones de funciones

Índice

1. Problemas

[1] Estudiar la convergencia de las siguientes integrales:

1) $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2+x^4}$	2) $\int_0^\infty \frac{1}{(x-1)^2}$	3) $\int_0^\infty \frac{x^5}{x^{12}+1}$
4) $\int_0^\infty e^{-x}\ln(1+e^x)$	5) $\int_0^\infty x^2e^{-x}$	6) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}$
7) $\int_0^1 \sqrt{x}\csc(x)$	8) $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{\frac{3}{2}}}$	9) $\int_0^\pi \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}$
10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}$	11) $\int_0^\infty x^x$	12) $\int_0^\infty \frac{1}{x\ln^p(x)}$

[2] Calcular, si existe, el área comprendida entre las curvas $y=\frac{1}{a^2+x^2}$ y el eje OX.

[3] Dada la curva $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ con dominio $(0,1]$.

1. Determine la existencia de $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$.
2. Determine si el volumen obtenido por la rotación del área anterior en torno al eje OY es finito.
3. Determine si existe la superficie de revolución.

[4] Calcular, si existe, el área encerrada por la curva $y^2(1-x)=1+x$ y su propia asíntota.

[5] Determinar para cuales valores de $n\in\mathbb{N}$ la integral $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^3(1-x)}}$ es convergente y establezca una forma recursiva para la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

[6] Sea f una función definida sobre el intervalo (a,∞), acotada y con derivada continua. Demuestre que la integral $\int\limits_a^\infty \frac{f'}{x^\alpha}$ existe si $\alpha>0$. Ind: integrar por partes.

[7] Considere la función $f(x)$ definida por: $f(x)=\begin{cases} n & \text{si } n\le x\le n+\frac{1}{n^3},\ n\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$. Calcule la integral $\int_0^\infty f$. Ind: Fijarse que f es no negativa y acotada.

[8] Mostrar que las integrales $I=\int\limits_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}$ y $J=\int\limits_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x}$ existen y calcular su diferencia.

[9] Mostrar que la integral $I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x}$ existe y probar la relación $\frac{1}{4} < I < 1$. Mostrar que $J = \int_0^\infty \frac{x}{1+x} e^{-x}$ existe y expresarla en función de I.

[10] Considerar $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-ax}$ con n y a positivos y n entero. Demostrar que I_n existe. Establecer una relación de recurrencia entre I_n e I_{n-1}. Calcular I_n.

[11] Mostrar que la integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen}(x))$ verifica la relación: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x))$. Deducir el valor de I.

[12] Estudie la convergencia de las siguientes series:

1) $\sum_1^\infty \frac{4}{\sqrt{n}}$ 2) $\sum_1^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 3) $\sum_1^\infty \frac{n-1}{n^3}$ 4) $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

5) $\sum_1^\infty \frac{n+1}{n2^n}$ 6) $\sum_1^\infty \frac{1}{n^n}$ 7) $\sum_1^\infty \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ 8) $\sum_1^\infty \operatorname{sen}(\frac{1}{n})$

9) $\sum_1^\infty \frac{|\operatorname{sen}(n)|}{n^2}$ 10) $\sum_1^\infty \frac{n^{10}}{(1{,}01)^n}$ 11) $\sum_1^\infty \frac{\alpha^{2n}}{2^n}$ 12) $\sum_1^\infty \frac{\ln(n)}{n^2}$

[13] Sea $a_n \geq 0$ y $\lim_{n\to\infty} q^n a_n = 0$ para algún $q > 1$. Estudie la convergencia de la serie $\sum_1^\infty a_n$.

[14] Estudie la convergencia de (i) $\sum_2^\infty \frac{1}{n \ln^\alpha(n)}$ y (ii) $\sum_1^\infty \frac{1}{a^n - b^n}$ con $a > b > 0$.

[15] Dada la serie $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{n+3}{n^3+2n}$:

1. Probar que es convergente.
2. Estimar una cota para su valor.
3. Determinar el número de términos que deben tomarse para calcular la suma de la serie con un error menor o igual a 10^{-3}.

[16] Sea $u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^2})$. Calcule $\sum_2^\infty u_n$.
Ind: Utilice propiedad telescópica de las sumatorias.

[17] Sabiendo que el valor de la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ es $\frac{\pi^2}{6}$, calcular el valor de:

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2^2\cdot 3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \cdots$$

Ind: considere la igualdad $\frac{1}{n^2(n+1)^2} = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})^2$.

[18] Determinar para que valores de a la serie $\sum_1^\infty a^n n^a$ es absolutamente convergente y para que valores es condicionalmente convergente.

[19] Estudiar la convergencia absoluta de las siguientes series

(a) $\sum_1^\infty \frac{x^n \ln(n)}{\sqrt{n}+2}$ (b) $\sum_1^\infty \frac{x^n n!}{n^n}$ (c) $\sum_0^\infty \frac{x^n n^{n+1}}{n!}$ (d) $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$.

[20] Demostrar que si $\sum_1^\infty a_n$ y $\sum_1^\infty b_n$ son dos series de términos positivos, si $\sum_1^\infty b_n$ converge y si $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $\sum_1^\infty a_n$ converge.

[21] Si $\sum_{1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de términos positivos, tal que no hay ningún n para el cual $a_n = 1$, demostrar que (a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ y (b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$ son también series convergentes.

[22] Supóngase que por el test del cociente se sabe que la serie $\sum_{1}^{\infty} a_n$ es convergente. Demostrar que $\sum_{1}^{\infty} na_n$ también es convergente.

[23] Si $\sum_{1}^{\infty} |a_n|$ converge, demostrar que $\sum_{1}^{\infty} a_n^2$ converge. Hallar un ejemplo en el cual $\sum_{1}^{\infty} a_n^2$ converja, pero $\sum_{1}^{\infty} |a_n|$ diverja.

[24] Estudie la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{n}e^{n^3 x}$.

[25] Considere la sucesión de funciones $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \frac{n^\alpha x^2}{1+n^\alpha x^2}$ con $\alpha \neq 0$. Estudie la convergencia puntual y uniforme para $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$. Averigue si se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} f_n$$

[26] Demostrar que la serie de funciones $\sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una cierta función f. Acote $\int_{0}^{1} f$, siendo f la función obtenida anteriormente.

[27] Estudiar la convergencia uniforme de la serie de funciones $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$.

[28] Indique los valores de x para los cuales la serie $\sum_{0}^{\infty} e^{-nx^2}$ converge.

[29] Demostrar que $\sum_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ converge absolutamente para todos los valores de x.

[30] Aplicar la prueba de cociente para demostrar que la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(\frac{x}{1+x})^n$ converge para $x > -\frac{1}{2}$ y diverge para $x < -\frac{1}{2}$. Determinar que ocurre en $x = \frac{1}{2}$.

[31] Encuentre el desarrollo en series de potencias de las siguientes funciones y determine radio e intervalo de convergencia.

1. $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$.
2. $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+2x)}$.

[32]

1. Determine la función e intervalo de convergencia asociada a la serie $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.
2. Pruebe que $\arctan(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$en $(-1, 1)$.
3. Deduzca una serie para calcular π.

[33] 1. Demuestre que $\frac{1}{(1-x)^3} = \sum\limits_{0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n$.

2. Calcule el área bajo la curva $f(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ entre 0 y π.

3. Desarrolle en serie de Taylor las funciones $f(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt$ y $g(x) = \int\limits_{0}^{x} \operatorname{sen}(t^2)$.

[34] Demostrar que $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1-x\operatorname{sen}^2(t)} dt = \sum\limits_{0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$, con $|x| < 1$.

[35] Sea $f(x) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$ con f par en $(-r, r)$. Demostrar que $a_{2n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Preguntas de Controles de años anteriores

[1] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{senh}(x)})$para $x \neq 0$ y $f(0) = k$.

1. Encuentre el valor de k de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

2. Estudie la convergencia de las integrales $\int\limits_{0}^{1} f$,$\int\limits_{1}^{\infty} f$, $\int\limits_{0}^{\infty} f$ y $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f$.

[2] 1. Sea (a_n) una sucesión tal que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente. Demuestre que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ y $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sqrt{|a_n|}}{n}$ también convergen absolutamente.

2. Estudie las siguientes series de potencias, determinando el radio e intervalo de convergencia.

   a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^p} x^n$, $p \in \mathbb{R}$ dado.

   b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1+|\operatorname{sen}(n)|}{n} x^n$.

3. Estudie la convergencia puntual de la siguiente sucesión de funciones:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{n} \\ (n+1)(x+\frac{1}{n}) & x \in [-\frac{1}{n}, 0] \\ -(n+1)(x-\frac{1}{n}) & x \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

[3] Considere las series de potencias $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$ y $t(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$.

1. Para $x \in]0,1[$ pruebe que $s(x) = \frac{1}{1+x^3}$ y calcule $t(x)$.

2. Pruebe la convergencia de la serie $t(1)$.

3. Verifique que para $x \in]0,1[$ se tiene que $t(1) - t(x) = (1-x) \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, donde a_n es el promedio $a_n = \frac{1+x+x^2+\cdots x^{3n+1}}{3n+1}$.

4. Pruebe que a_n es decreciente y deduzca de ello que $0 \leq t(1) - t(x) \leq (1-x) \quad \forall x \in]0,1[$.

5. Concluya que $\lim\limits_{x\to 1^-} t(x) = t(1)$ y calcule $t(1)$.

[4] 1. Encuentre el valor de α que hace continua a la función :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{1-x} & 0\leq x<1 \\ \alpha & x=1 \end{cases}$$

2. Ahora considere la serie $\sum\limits_{0}^{\infty} I_k$, donde $I_k=\int\limits_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)x^k$.

   a) Muestre que las sumas parciales $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1} I_k$ satisfacen: $S_n=\int\limits_0^1 f-\int\limits_0^1 f(x)x^n$, donde f es la función de la parte anterior.

   b) Pruebe que la serie es convergente y que su límite vale $\int\limits_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}$.

[5] Dada la función $f(x)=e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})$. Se pide :

1. Estudiarla completamente indicando dominio,ceros, límites importantes, asíntotas, continuidad, crecimiento, concavidades, gráfico y recorrido.
2. Determinar si el área de las siguientes regiones es o no finita. En caso afirmativo dar su valor.

$$\begin{aligned} R_1&=\{(x,y)/x<0 \;\; f(x)\leq y\leq 1\} \\ R_2&=\{(x,y)/0<x\leq 1 \;\; f(x)\leq y\leq 1\} \\ R_3&=\{(x,y)/x\geq 1 \;\; f(x)\leq y\leq 1\} \end{aligned}$$

Ind: Ni $e^{\frac{1}{x}}$ ni $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ tienen primitivas explícitamente calculables, sin embargo, f sí la tiene.

[6] 1. Sea la función $f(x)$ definida por :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x(1+x^2)} & x>0 \\ a & x=0 \end{cases}$$

Determine el valor de a de modo que $f(x)$ sea continua en $x=0$. Demuestre que la integral impropia $\int_0^{\infty} f$ converge y calcular su valor. Ind: Considere el cambio de variable $u=\sqrt{1+x^2}$.

2. Sea la curva $(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}+\frac{y}{b}=1$. Analice la existencia de la longitud de la curva en el intervalo $[-a,a]$, y evalúela en caso de que exista. Ind: Utilice argumentos de simetría.

[7] 1. Considerar la integral impropia $J_n=\int\limits_0^1 \ln^n(x)$.

   a) Demostrar que es convergente.

   b) Demostrar la fórmula de recurrencia $J_n=-nJ_{n-1}$ y luego deducir el valor de J_n.

2. Considerar la superficie lateral del sólido que se genera al rotar la curva $f(x)=e^{-x}$ en torno al eje OX , para $x>0$. Probar que la integral converge y calcular el valor de la superficie.

[8] Sea $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ una función decreciente con $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$. Para $n\in\mathbb{N}$ sea $d_n=\sum_{i=1}^n f(i)-\int_1^n f$.

1. Probar que $d_n\geq 0$, que d_n es decreciente y que se tiene

$$0\leq d_n-d_{n+1}\leq f(n)-f(n+1)$$

Ind: integrar la desigualdad $f(i+1)\leq f(x)\leq f(i)$ para $x\in[i,i+1]$.

2. Deducir que para $n, k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$0 \leq d_n - d_{n+k} \leq f(n) - f(n+k)$$

y concluir que d_n converge a un límite $d \geq 0$ que satisface: $0 \leq d_{n-}d \leq f(n)$.

3. Aplicar lo anterior para probar la existencia de una constante $c \geq 0$ tal que: $\sum\limits_{i=1} \frac{1}{i} = \ln(n)+c+\epsilon_n$ con $0 \leq \epsilon_n \leq \frac{1}{n}$.

4. Usar la identidad de la parte c) para estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

[9] Sea la serie de potencias $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$.

1. Determine el radio de convergencia de la serie.
2. Determine el intervalo de convergencia de la serie, incluidos los extremos.
3. Demuestre que $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = (1-x)\ln(1-x)+x$. Ind: $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

[10] 1. Para la función $f(x) = \frac{x}{(1+x)^3}$ encuentre: dominio, ceros, crecimiento, asíntotas de todo tipo, mínimos, máximos, puntos de inflexión y gráfico.

2. Encuentre el área de la región encerrada por la función f , desde 0 hasta infinito, y el eje OX.
3. Analizar la existencia de los volúmenes obtenidos al girar el área antes calculada, en torno a los ejes OX y OY. En caso de existir, calcularlos.

[11] Para la serie de potencias:

$$\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)(x-1)^n$$

con $0 < b < a$, encuentre: radio de convergencia, intervalo de convergencia, convergencia en los extremos del intervalo.

[12] 1. Determine el intervalo de convergencia para la serie de potencias $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n$. No olvide analizar los extremos del intervalo.

2. Determine el conjunto de convergencia de la serie de funciones $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{x}{1-x})^n$.

3. Sea $f\colon C \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{x}{1-x})^n$.

   a) Demuestre que $f'(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}$.

   b) Integrando, encuentre una expresión explícita para $f(x)$.

[13] 1. Aplicando la definición de integral impropia calcule:

$$\int_{-\infty}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}$$

2. Analice la convergencia de la integral:

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}$$

3. Analice la convergencia de las áreas de las superficies engendradas al rotar la función $|\ln(x)|\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ en torno al eje OX y en torno al eje OY.

[14] 1. Analice la convergencia de la siguiente serie; en caso de ser convergente, calcule su valor $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. Ind: utilice la identidad $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$.

2. Use el Criterio de la Integral para analizar la convergencia de la integral $\int_1^{\infty} \frac{e^y}{y^y}$.

3. Analice la convergencia absoluta y condicional de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}$.

[15] 1. Analice la convergencia de las siguientes series. Cuando corresponda, determine todos los valores de a par a los cuales éstas convergen.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}{n} \qquad 2)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)} \qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an}$$

2. Para la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n(3n-1)}$.

   a) Determine el radio de convergencia.

   b) Analice la convergencia en los casos extremos.

[16] 1. Sea $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $]0,\pi[$ con f'' integrable en $[0,\pi]$.

   a) Pruebe que $\int\limits_0^{\pi} f''(x)\operatorname{sen}(x) = -\int\limits_0^{\pi} f'(x)\cos(x)$.

   b) Pruebe que $\int\limits_0^{\pi} f'(x)\cos(x) = \int\limits_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(x) + f(0) + f(\pi)$.

   c) Para $f(x) = e^{-\arctan(\operatorname{sen}(x))}$, calcule $\int\limits_0^{\pi} (f(x) + f''(x))\operatorname{sen}(x)$.

2. *a*) Analice la convergencia de $J = \int\limits_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ y de $K = \int\limits_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}$.

   b) Demuestre que $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} = 0$. Ind: $I = J + K$.

[17] 1. Analice la función $f(x) = xe^{-2x^2}$.

   a) Calcule f' , encuentre mínimos, máximos y analice el crecimiento.

   b) Calcule f'' , encuentre puntos de inflexión y analice la concavidad.

   c) Encuentre cero(s), signos, paridad, asíntota(s) horizontal(es) y grafique.

2. Para la región $R = \{(x,y) :\ 0 \le x < \infty :) \le y \le f(x)\}$ encuentre:

   a) El área.

   b) El volumen obtenido al rotar R en torno al eje OX. Ind: $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

[18] 1. Usando el Teorema del Valor Medio demuestre que para todo $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ se tiene la desigualdad $\operatorname{sen}(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

2. Usando la parte (a) estudie la convergencia de la integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\operatorname{sen}(x))^{\frac{1}{2}}}$.

[19] Considere las integrales impropias $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen}(x))$ y $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))$.

1. Demuestre que $\forall \epsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\int\limits_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen}(x)) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \ln(\cos(x))$.
2. Demuestre que I converge usando que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \operatorname{sen}(x) \geq \frac{x}{2}$.
3. Calcule I. Ind: Desarrolle $I + J$.

[20] 1. Calcular $\int\limits_1^b \frac{\ln(t)}{t^\alpha}$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $b \geq 1$. Distinga los casos $\alpha = 1$ y $\alpha \neq 1$.

2. Estudiar la convergencia de la integral $\int\limits_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^\alpha}$, y en los casos que la integral sea convergente calcular su valor.

[21] 1. Considere la función definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$ y calcule, si existe , el área comprendida entre la curva, el eje OX y sus asíntotas.

2. Sea $\bar{x}$ el punto mínimo local de f (la misma que la parte anterior). Calcule, si existe, el volumen de revolución en torno al eje OY de la región comprendida entre la curva, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \bar{x}$.
3. Demuestre que la longitud s del arco de la curva $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ comprendido entre los puntos $(0, a)$ y (x_0, y_0) de ella es $s = \sqrt{y_0^2 - a^2}$.

[22]

1. Pruebe que $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ converge. Ind: use integración por partes.
2. Pruebe que no hay convergencia absoluta. Ind: Demuestre que $|\operatorname{sen}(x)| \geq \frac{1-\cos(2x)}{2}$.
3. Determine los máximos y mínimos locales de la función G dada por: $G(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2} dt$.

[23] Sea $I = \int_0^\infty e^{-x^2}$.

1. Demuestre que I converge.
2. Si se sabe que $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, demuestre que $\int_{-\infty}^\infty f(x) = 1$, para la función f dada por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$, donde σ y μ son constantes.
3. Calcule $\int_{-\infty}^\infty (x-\mu)^2$.

[24] Sea $\sum\limits_{k=1}^\infty u_k$ una serie con $u_k \geq 0$, tal que $\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(\frac{1}{u_k})}{\ln(k)} = \lambda > 1$. Demuestre que $\sum\limits_{k=1}^\infty u_k$ converge.

[25] 1. Sea (u_n) una sucesión de números reales positivos. Mostrar que:$\sum\limits_n u_n$ converge ssi $\sum\limits_n \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.

2. Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones de números positivos, cuyas series asociadas son convergentes. Mostrar que: $\sum \sqrt{u_n v_n}$ es convergente.
3. Dado $q \geq 0$, encuentre el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_n \frac{x^n}{1+q^n}$.

[26] Considere la sucesión de funciones f_n donde $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ está definida por: $f_n(x) = \text{sen}^n(x)$.

1. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión f_n.
2. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión g_n , donde $g_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ está definida por $g_n(x) = \int\limits_0^x f_n(t)dt$.

[27] Considere la sucesión de funciones $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = e^{-nx^2} \text{sen}(nx) + \sqrt{1 - x^2} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Demostrar que f_n converge puntualmente a la función $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en $[-1, 1]$.
2. Demostrar que :
$$(\forall u \in]0, 1]) : \;\; f_n \xrightarrow{c.u.} F \;\; en \;\; [u, 1].$$
3. Demostrar que (f_n) no converge uniformemente en $[0, 1]$. Ind: Razone por contradicción, estudiando la diferencia $|f_n(\frac{1}{n}) - F(\frac{1}{n})|$.

[28] Demuestre que las siguientes series de funciones convergen uniformemente en los intervalos que se indican:

1. $\sum\limits_n \text{sen}(n^{-[x^2+2]})$ en $\mathbb{R}$.
2. $\sum\limits_n n^2 e^{nx}$ en $(-\infty, -\frac{1}{3}]$.

[29] Estudiar la convergencia puntual y uniforme de

$$f_n(x) = \begin{cases} (x - n)(n^2 - x) & x \in [n, n^2] \\ 0 & x < 0 \text{ ó } x > n^2 \end{cases}$$

Si se define $g_n(x) = f_n(x)n^{-5}$. Analice la convergencia puntual y uniforme de esta nueva sucesión.

3. Pauta Control #6 MA12A Cálculo, Año 2002

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.-

(i) (2 ptos.) Pruebe que las integrales $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2}, \;\; \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ divergen.

(ii) (2 ptos.) Pruebe que $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$ converge y encuentre su valor.

(iii) (2 ptos.) Encuentre los valores de $\alpha > 0$ para lo cuales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha(1-x)}}\,dx$ converge.

Ind. El comportamiento de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ y $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ se considera conocido.

Pauta.-

(i) Las integrales que aparecen convergen si los límites siguientes existen:

$$\lim_{a\to 1^+}\int_a^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{a\to 1^+}\int_a^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Empecemos calculando las primitivas; haciendo el cambio de variables $u = \ln x$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} &= \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C\\ &= -\frac{1}{\ln x} + C.\end{aligned}$$

La segunda es

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + C.$$

Vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 1^+}\int_a^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2} &= \lim_{a\to 1^+} -\frac{1}{\ln x}\Big]_a^2\\ &= \lim_{a\to 1^+} -\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln a}\end{aligned}$$

no existe por lo que la primera integral diverge. De modo similar

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 1^+}\int_a^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{a\to 1^+}\int_a^2 -\frac{1}{x-1}\Big]_a^2\\ &= \lim_{a\to 1^+} -1 + \frac{1}{a-1}\end{aligned}$$

tampoco existe.

(ii) Por definición la integral impropia converge si

$$\lim_{a\to 1^+}\int_a^2 \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx, \qquad \lim_{R\to\infty}\int_2^R \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx \tag{1}$$

existen. En la primera parte de este problema ya calculamos la primitiva

$$\int \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = -\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{x-1} + C.$$

Luego

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 1^+}\int_a^2 \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx &= \lim_{a\to 1^+} -\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{x-1}\Big]_a^2\\ &= \lim_{a\to 1^+} -\frac{1}{\ln 2} + 1 + \frac{1}{\ln a} - \frac{1}{a-1}.\end{aligned}$$

Concentrémonos en el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 1^+} \frac{1}{\ln a} - \frac{1}{a-1} &= \lim_{a\to 1^+} \frac{a-1-\ln a}{(a-1)\ln a} \quad \text{usamos la regla de l'Hôpital} \\
&= \lim_{a\to 1^+} \frac{1-\frac{1}{a}}{\ln a + \frac{a-1}{a}} \\
&= \lim_{a\to 1^+} \frac{a-1}{a-1+a\ln a} \quad \text{y usando l'Hôpital nuevamente} \\
&= \lim_{a\to 1^+} \frac{1}{2+\ln a} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\lim_{a\to 1^+} \int_a^2 \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = -\frac{1}{\ln 2} + \frac{3}{2}.$$

Ahora calculemos

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_2^R \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx &= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{x-1}\Big]_2^R \\
&= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{\ln R} + \frac{1}{R-1} + \frac{1}{\ln 2} - 1 \\
&= \frac{1}{\ln 2} - 1.
\end{aligned}$$

Vemos que ambos límites en (1) existen, por lo que la integral

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$$

converge y además su valor es

$$-\frac{1}{\ln 2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{\ln 2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

(iii) La función $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\alpha(1-x)}}$ es continua en en (0,1] y tiene una asíntota vertical en 0 si $\alpha > 0$. Por lo tanto la integral en el enunciado es impropia. Para determinar si converge podemos utilizar el criterio de comparación por cuociente, con la función $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$. Para ello primero calculemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^{\alpha(1-x)}}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{x^{\alpha(1-x)}} = \lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Este límite se puede encontrar calculando primero

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x^x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$$

por lo que vemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^{\alpha(1-x)}}}{\frac{1}{x^\alpha}} = 1.$$

Como este límite existe y es positivo, el criterio de comparación nos garantiza que la integral del enunciado converge si y sólo si la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

converge, lo cual ocurre si y sólo si $\alpha < 1$.

P2.-

(i) **(a)** (1.5 ptos.) Demuestre que para todo número real p, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{pn}}{n!}$ converge .

(b) (1.5 ptos.) Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{10}{n}\right)^{n^2}}{n!}$.

(ii) Considere la función

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), \quad x \geq 0.$$

(a) (1.5 ptos.) Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ de término $a_n = (-1)^n f(n)$ converge.

(b) (1.5 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\, f(x)$ y utilice este resultado para demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ definida en **(ii)(a)** no converge absolutamente.

Pauta.-

(i) **(a)** En este ejercicio usamos el criterio del cuociente con $a_n = \dfrac{e^{np}}{n!}$ y $a_{n+1} = \dfrac{e^{(n+1)p}}{(n+1)!}$. De este modo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^p}{n+1} \to 0 \quad \text{si } n \to \infty.$$

Por lo tanto la serie $\sum a_n$ es una serie convergente.

(b) Aquí basta con usar comparación con una serie del tipo de las estudiadas en la parte **(a)**. En efecto, es bien sabido que

$$\left(1+\frac{10}{n}\right)^n \leq e^{10},$$

por lo que el término n-ésimo de la serie en estudio es acotado superiormente por

$$\frac{e^{10n}}{n!},$$

y como esta sucesión genera una serie convergente (ya demostrado en la parte anterior), entonces la serie estudiada converge.

(ii) **(a)** Claramente $f(x)$ es decreciente y convergente a cero si $x \to +\infty$. Para ver el decrecimiento puede calcularse $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0$. La convergencia a cero viene directamente del hecho que $\tan(x) \to +\infty$ si $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$. En efecto, haciendo el cambio de variables $x = \tan(y)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) &= \lim_{y\to(\pi/2)^-}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\tan(y))\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \lim_{y\to(\pi/2)^-} y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0
\end{aligned}$$

En consecuencia, en virtud del criterio de Leibniz, se concluye que la serie $\sum_n (-1)^n f(n)$ es convergente.

(b) El límite pedido se calcula usando la regla de l'Hôpital. Efectivamente (el límite es de la forma 0/0)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x)\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(x)}{1/x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Usando este cálculo, se concluye que la serie $\sum f(n)$ tiene el mismo comportamiento que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$. Como esta última es sabidamente divergente, la serie en estudio también lo es. Esto concluye la demostración de la convergencia condicional de la serie $\sum(-1)^n f(n)$.

NOTA: En la parte **(i)(a)** pueden utilizarse otros criterios.

1.- Si se usa el criterio de la raíz n-ésima, es necesario saber que la sucesión $\sqrt[n]{n!}$ es no acotada, lo cual es una propiedad no standard y difícil de demostrar. En este caso no se puede asignar puntaje por el límite, salvo que el alumno justifique este último límite!

2.- También se puede argumentar usando series de potencias y diciendo que la serie en cuestión corresponde al desarrollo en serie de potencias de la función e^x que converge para todo x real en particular en $x = e^p$, esto es la serie converge y vale e^{e^p}.

P3.- **(i)** (2 ptos.) Demuestre que $\forall a > 1$ la integral $\displaystyle\int_1^\infty a^{-x}\,dx$ converge .

(ii) (2 ptos.) Sea $f : [1,\infty) \to (0,\infty)$ una función continua tal que existe

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x))^{1/x} < 1.$$

Demuestre que $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge. Concluya que $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{e}{x}\right)^x dx$ es convergente.

Ind. Observe que si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) < 1$, entonces $\exists\ a > 1$ tal que $g(x) \le \frac{1}{a}$ para x suficientemente grande.

(iii) (2 ptos.) **Usando** el criterio integral, analice la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$. Verifique también que se cumplen todas las hipótesis necesarias para aplicar este criterio.

Pauta.- **(i)** Para calcular una primitiva de a^{-x} con $a > 1$, notemos que

$$a^{-x} = e^{-x\ln a}$$

de modo que queda fácilmente ($\ln a > 0$ si $a > 1$)

$$\int a^{-x}\,dx = \int e^{-x\ln a}\,dx = -\frac{1}{\ln a}e^{-x\ln a} + C = -\frac{1}{\ln a}a^{-x} + C.$$

La función $a^{-x} = e^{-x\ln a}$ es continua para $x \in [1,+\infty)$ (de hecho en $x = 1$ vale $1/a$) por lo que para que exista la integral impropia pedida, es necesario y suficiente que exista el límite

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x a^{-x}\,dx.$$

Este límite es

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln a}e^{-x\ln a} + \frac{1}{a\ln a}\right) = \frac{1}{a\ln a}$$

pues $\ln a > 0$ si $a > 1$. Se concluye entonces que la integral converge.

(ii) Usando la indicación, existe un $M > 1$ (suficientemente grande) tal que

$$(f(x))^{1/x} \leq a^{-x}, \quad \forall x \in [M, +\infty)$$

de donde comparando se obtiene que

$$\int_M^\infty (f(x))^{1/x}\, dx \leq \int_M^\infty a^{-x}\, dx \leq \int_1^\infty a^{-x}\, dx < +\infty,$$

donde hemos usado que $a^{-x} = e^{-x \ln a} > 0$ para $x \in [1, M]$. Como f es no negativa se obtiene de lo anterior la convergencia de la integral

$$\int_M^\infty (f(x))^{1/x}\, dx.$$

Finalmente, como $f(x)^{1/x}$ es continua en $[1, M]$, es en consecuencia integrable en $[1, M]$ y entonces

$$\int_1^\infty (f(x))^{1/x}\, dx = \int_1^M (f(x))^{1/x}\, dx + \int_1^\infty (f(x))^{1/x}\, dx,$$

por lo que esta última converge. Se concluye que la integral $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{e}{x}\right)^x dx$ converge tomando $f(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x$. Esta función es claramente continua, positiva y se verifica que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{e}{x}\right)^x\right)^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e}{x}\right) = 0 < 1.$$

(iii) Verifiquemos que la función $f(x) = (\ln x)^{-\ln x}$ es no negativa y decreciente (al menos para x grande). Es fácil ver que f es no negativa. Notando que

$$f(x) = (\ln x)^{-\ln x} = e^{-\ln x(\ln(\ln x))}$$

se obtiene

$$f'(x) = -\left(\ln x \ln(\ln x) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln(\ln x)\right) e^{-\ln x(\ln(\ln x))}.$$

Notando que $\ln x > 1$ si $x > e$, se obtiene a su vez que $\ln(\ln x) > 0$ si $x > e$, de donde $f' < 0$ para $x > e$. La función es pues decreciente y no negativa para $x > e$ de donde aplicando el criterio integral, la convergencia de la serie pedida es equivalente a la convergencia de la integral impropia

$$\int_e^\infty \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}}\, dx,$$

pero haciendo el cambio de variables $y = \ln x$ se obtiene $(dx = e^y\, dy)$

$$\int_e^\infty \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}}\, dx = \int_1^\infty \frac{e^y}{y^y}\, dx = \int_1^\infty \left(\frac{e}{y}\right)^y\, dx,$$

que es convergente como se vio en la primera parte del problema. Se concluye que la serie es pues convergente.

4. Problemas resueltos

P1.- *a*) Considere la función definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$ y calcule, si existe, el área comprendida entre la curva, el eje OX y sus asintotas.

b) Sea $\bar{x}$ el punto mínimo local de f. Calcule, si existe, el volumen de revolución en torno al eje OY de la región comprendida entre la curva, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \bar{x}$.

Solución:

a) Notemos que

$$\int_0^2 f(x)dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{(1)} + \underbrace{\int_1^2 f(x)dx}_{(2)}$$

Estudiemos (1). Es claro que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/2}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y luego como $\int_0^1 x^{-1/2}dx$ es convergente se tiene que (1) converge.

Para (2) se cumple que $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{2-x}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ como $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$ es convergente se tiene que (2) también converge.

b) Es fácil verificar que $f'(\bar{x}) = 0$ para $\bar{x} = 1$, como además $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ se sigue que necesariamente $\bar{x} = 1$ es mínimo de f en $(0, 2)$. De esta forma:

$$V_{OY} = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{x}{\sqrt{x(2-x)}}dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(2-x)}}dx$$

este cálculo se deja al lector.

P2.- Determinar los valores de α y β para los cuales la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}$ es convergente.

Ind: Realice el cambio de variables $x^\beta = t$.

Solución:

- Caso $\beta = 0$, se tiene que la integral es convergente si y solo si $\alpha > 1$
- Caso $\beta > 0$, Realizando el cambio de variables $x^\beta = t$ se obtiene $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\beta t}$, además si $x = 1$ entonces $t = 1$ y si $x \to \infty$ entonces $t \to \infty$. De esta forma:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha-1}(1+x^\beta)} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{\beta}\int_1^\infty \frac{1}{t^{\frac{\alpha-1}{\beta}+1}(1+t)}dt$$

como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\frac{\alpha-1}{\beta}+2}}{t^{\frac{\alpha-1}{\beta}+1}(1+t)} = 1$$

la integral converge si y solo si $\frac{\alpha-1}{\beta} + 2 > 1$ esto es $\alpha + \beta > 1$.

- Caso $\beta < 0$, se deja al lector.

P3.- estudie la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})}$ para $\alpha > 1$.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$ (Ind: demuestre que $\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0$)

Solución:

a) Utilizando el *Criterio de la Raíz enésima* se obtiene

$$\begin{aligned} L &= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Como $L < 1$ se tiene que la serie converge.

b) Utilizando el *Criterio del Cuociente* se obtiene

$$\begin{aligned} L &= \lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})\cdot\sqrt{(k-1)!}\sqrt{k}}{\sqrt{(k-1)!}\cdot\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})\cdot(1+\alpha\sqrt{k+1})} \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{k}}{1+\alpha\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Como $L = 1/\alpha < 1$ se tiene que la serie es convergente.

c) Mostremos que $\arctan(x) \leq x \quad \forall x \geq 0$. En efecto, sea $x > 0$, aplicando el teorema del valor medio a la función $t \mapsto \arctan(t)$ en el intervalo $[0, x]$, se demuestra la existencia de $\xi \in (0, x)$ tal que

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x} = \frac{1}{1+\xi^2} \leq 1$$

de donde se obtiene el resultado pedido. (para $x = 0$ la propiedad se cumple trivialmente). Utilizando lo anterior es claro que

$$0 \leq \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) \leq \frac{1}{1+k+k^2}$$

como la serie $\sum_k \frac{1}{1+k+k^2}$ es convergente (¿por qué?), por el criterio de comparación, la serie $\sum_k \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$ también lo es.

P4.- Estudie la convergencia uniforme y puntual de

$$f_k(x) = \begin{cases} k^k|x|^k & |x| \leq \frac{1}{k} \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$$

donde $x \in [-1, 1]$. Analice qué sucede con la convergencia de $\int_{-1}^{1}|f_k(x) - 1|dx$.

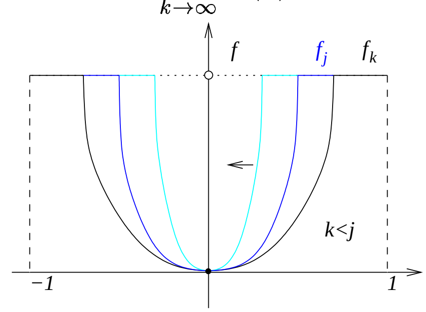
Solución:

Dado $x \neq 0$, es fácil ver que $\exists k_0$ tal que $\forall k \geq k_0$, $|x| > \frac{1}{k}$ y por lo tanto $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 1$.

Para $x = 0$, $f_k(0) = 0\ \forall k$ luego el límite puntual está dado por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Lo anterior se puede apreciar mejor en la siguiente figura:



Como convergencia uniforme implica convergencia puntual se tiene que f es nuestro *único* candidato a ser el límite uniforme. Sin embargo, como $f_k(x)$ es una sucesión de funciones continuas, no puede converger uniformemente, pues si lo hiciera entonces f (el límite puntual) sería continua.

Observación: también es posible argumentar que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_k(x) - f(x)| = 1 \quad \forall k$. Para probar esto basta considerar, para k fijo, la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$.

Finalmente estudiemos $\int_{-1}^{1} |1 - f_k(x)|dx$

$$\int_{-1}^{1} |1 - f_k(x)|dx = 2\int_0^{\frac{1}{k}} 1 - k^k|x|^k dx = 2\left[\frac{1}{k} - \frac{k^k}{(k+1)k^{k+1}}\right]$$
$$= 2\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)k}\right]$$

luego $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{-1}^{1} |1 - f_k(x)|dx = 0$.

P5.- Calcular $f(x) = \sum_1^\infty n^2x^n$ con $-1 < x < 1$.

Solución:

Es claro que la serie es absolutamente convergente para $-1 < x < 1$ y por lo tanto es válido:

$$\sum_1^\infty n^2x^n = x\sum_1^\infty n\frac{d(x^n)}{dx} = x\frac{d}{dx}\left(\sum_1^\infty nx^n\right)$$
$$= x\frac{d}{dx}\left(x\sum_1^\infty \frac{d(x^n)}{dx}\right) = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\left(\sum_0^\infty x^n\right)\right)$$
$$= x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right).$$

Concluya el lector.

a) Sea $0 < a < 1$, un parámetro fijo. Demuestre que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+a^2t^2}dt = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{a^{2n}}{2n+1}.$$

Ind: Recuerde que $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^\infty (-1)^n x^n$.

b) Concluya que

$$\frac{\arctan(a)}{a} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{a^{2n}}{2n+1}.$$

Solución:

a) Utilizando la indicación se tiene $\frac{1}{1+a^2t^2} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n (a^2t^2)^n$ la cual es absolutamente convergente para $a^2t^2 < 1$.

Integrando la serie se obtiene

$$\int_0^1 \frac{1}{1+a^2t^2}dt = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n a^{2n} \int_0^1 t^{2n}dt = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n a^{2n} \left.\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1 = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{a^{2n}}{2n+1}.$$

b) Para concluir es necesario calcular $\int_0^1 \frac{1}{1+a^2t^2}dt$ lo cual se deja al lector.