MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral

Auxiliar 14 : Integral Impropia

Integral Impropia:

- **Integral Impropia de Primera Especie:** Sea $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ una función. Diremos que f es integrable en $[a,+\infty)$ si f es integrable en todo intervalo $[a,x]$ con $x>a$ y si existe el límite $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_a^t f(x)dx$. Denotamos a este último por $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$
- **Integral Impropia de Segunda Especie** Sea $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ una función no acotada. Diremos que f es integrable en $[a,b)$ si f es integrable en todo intervalo $[a,x]$ con $x\in(a,b)$ y si existe el límite $\lim\limits_{t\to b}\int\limits_a^t f(x)dx$. Denotamos a este último por $\int\limits_a^b f(x)dx$
- **Convergencia Absoluta** Sea $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$. Diremos que $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ converge absolutamente si $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ converge. Además se tiene que:

$$\text{Convergencia absoluta} \;\Rightarrow\; \text{Convergencia}$$

  Ojo que la recíproca no se tiene (Contraejemplo: $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$ converge pero no así $\int\limits_0^\infty \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}dx$)
- **Criterio de Comparación:** Sean $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ **continuoas** tales que $0\le f(x)\le g(x)$. Entonces si $\int\limits_0^\infty g(x)dx$ converge, entonces $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ tambén converge. También se tiene que si $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ diverge, entonces $\int\limits_0^\infty g(x)dx$ diverge.
- **Criterio del Cuociente:** Sean $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ continuas y no negativas tales que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

  Entonces las integrales $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ y $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ o bien ambas convergen, o bien ambas divergen.

P1. *a*) Sea $f(x)\ge 0$ decreciente y de clase C^1 y tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Muestre que $\int\limits_0^\infty f'(x)dx$ es absolutamente convergente. Además muestre que $\int\limits_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(\alpha x)dx$ con $\alpha>0$ es convergente.

Dem.
En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |f'(x)|dx &= \int_0^\infty -f'(x)dx \quad (\ f'\le 0 \text{ pues } f \text{ decreciente }) \\ &= f(0) - \lim_{x\to\infty} f(x) \\ &= f(0) < \infty\end{aligned}$$

Para ver que $\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(\alpha x)dx$ converge, ocupamos integración por partes usando $u = f(x)$ y $dv = \operatorname{sen}(\alpha x)dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(\alpha x)dx &= f(x)\left(-\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f'(x)\cos(\alpha x)dx \\ &= \frac{f(0)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f'(x)\cos(\alpha x)dx\end{aligned}$$

En cuanto a la integral $\int_0^\infty f'(x)\cos(\alpha x)dx$ tenemos que

$$\int_0^\infty |f'(x)\cos(\alpha x)|dx \leq \int_0^\infty |f'(x)| \quad (\text{Pues } |\cos(x)| \leq 1))$$

Donde sabemos que la última integral converge, y por ende $\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f'(x)\cos(\alpha x)dx$ converge absolutamente (Y en particular converge)

b) Considere una función $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que en cada $n \in \mathbb{N}$ se levanta un triángulo isóceles de altura 1 y base $(1/2)^n$. Demuestre que $\int_0^\infty f(x)dx$ converge pero que $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$

Dem.

Es claro que dicha función no tiene límite, y a la vez su integral converge pues, por construcción:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(\frac{1}{2^{n+1}})}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Donde ocupamos la fórmula de la suma geométrica y le tomamos límite.

c) Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe. Demuestre que si $\int_0^\infty f(x)dx$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Dem.

Supongamos que no. Supongamos que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ con $l > 0$ sin pérdida de generalidad.

Luego, por definición, existe un $M > 0$ tal que para todo $x > M$, se tiene que $f(x) > \frac{l}{2}$ (Es usar la definición de límite, con $\varepsilon = \frac{l}{2}$).

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)dx &= \int_0^M f(x)dx + \int_M^\infty f(x)dx \\ &\geq \int_0^M f(x)dx + \int_M^\infty \frac{l}{2}dx \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Lo último es una contradicción ya que por hipótesis la itnegral converge.

d) Muestre que si $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ existe, entonces $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{\varepsilon t}^{t} f(x)dx = 0$ para todo $\varepsilon \in (0,1)$

Dem

En efecto, tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt = L$$

Del mismo modo, para todo $0 < \varepsilon < 1$ tenemos que

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^{\varepsilon x} f(t)dt = L$$

Restando ambos límites tenemos que

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt - \int_0^{\varepsilon\cdot x} f(t)dt = 0$$

Donde la ultima expresión es igual a

$$\lim_{x\to\infty}\int_{\varepsilon x}^{x} f(t)dt = 0$$

e) Use el resultado anterior para mostrar que si f es continua, positiva, monótona y además $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. Concluya que $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\ln(x)}dx$ no converge

Dem

Ocupamos TVM en el límite demostrado en la parte anterior y obtenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\int_{\varepsilon x}^{x} f(t)dt &= \lim_{x\to\infty} f(\xi)(x-\varepsilon x)\\ &= \lim_{x\to\infty} xf(\xi)(1-\varepsilon)\\ &= 0\end{aligned}$$

Como $(1-\varepsilon) > 0$ tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} xf(\xi(x)) = 0$$

Donde $\xi \in (\varepsilon x, x)$. Pero además sabemos que f es decreciente y positiva, por ende
$0 \le xf(x) \le xf(\xi)$
Y por sandwich concluímos que

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$$

f) Considere una función f como en la parte anterior. Muestre que $\int\limits_0^\infty \operatorname{sen}(f(x))$ converge.

Dem

De lo anterior, sabemos que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. En particular tenemos que, usando el límite conocido del seno:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} = 1 \neq 0$$

Por criterio de cuociente

$$\int\limits_0^\infty f(x)dx < \infty \Leftrightarrow \int\limits_0^\infty \operatorname{sen}(f(x))dx < \infty$$

P2. Determine si las siguientes integrales impropias convergen.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}dx$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}dx$

d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec(x)}{x^2}dx$

e) $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^2}dx$

f) $\int\limits_{-\infty}^\infty e^{x-e^x}dx$

g) $\int\limits_e^\infty \frac{1}{x\ln(x)}dx$

h) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}$