MA1002-4 Cálculo diferencial e integral
Profesor: Matías Godoy Campbell
Auxiliar: Cristóbal Valenzuela M

Auxiliar 11

P1. Sea f una función positiva, continua y decreciente en el intervalo $[0,1]$. Pruebe que

$$\int_0^1 xf(x)dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)$$

Hint: Use TVM

P2. Demuestre que

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} < \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen}(t)}dt < \frac{\pi}{4}$$

Note bien la desigualdad estricta!

P3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y acotada inferiormente por una constante $c > 0$. Para demostrar que $\frac{1}{f}$ es integrable, se pide lo siguiente:

(a) Pruebe que para toda partición P del intervalo $[a,b]$ se cumple que:

$$S(\frac{1}{f},P) - s(\frac{1}{f},P) \leq \frac{1}{c^2}\left(S(f,P) - s(f,P)\right)$$

(b) Use el resultado anterior para demostrar que la función $\frac{1}{f}$ es integrable en $[a,b]$

P4. Sea $k \in \mathbb{R}^+$. Considere la función F definida en $[0,\infty)$ por

$$F(x) = \int_0^1 s^k \operatorname{sen}(sx)ds$$

(a) Demuestre que $\forall x > 0$

$$F(x) = \frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x t^k \operatorname{sen}(t)dt$$

(b) Probar que F es derivable en $[0,\infty)$ para lo cual ustifique la derivabilidad de F en $(0,\infty)$ y calcule $F'(0)$ usando la definición

(c) Demuestre que $\forall x \in [0,\infty)$ se verifica que

$$xF'(x) + (k+1)F(x) = \operatorname{sen}(x)$$