MA1002-1 Cálculo diferencial e integral
Profesor: Matías Godoy
Auxiliar: Cristóbal Valenzuela

Auxiliar 9- Repaso C3

(**P**1) Sabiendo que $f(\pi) = 2$ y que $\int\limits_0^\pi (f(x) + f''(x))\operatorname{sen}(x)dx = 5$. Calcular $f(0)$

(**P**2) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int\limits_{x^2}^{x^3} e^{s^2} ds$. Demuestre que F es diferenciable y calcule $F'(x)$

(**P**3) Sea f una función integrable en $[-a, a]$. Calcule $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$ cuando f es impar y cuando es par.

(**P**4) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \operatorname{sen}(\frac{x^2}{n})e^{x^2}dx$

(**P**5) (**a**) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} i2^{\frac{i}{n}}\right)$

(**b**) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^{x^2} f(t)dt}{\int\limits_0^{x} xf(t)dt}$ m,

(**c**) Sea $p \in \mathbb{N}$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} 2\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(3n + 2i)}{n^{p+1}}$

(**P**6) Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ que es C^1 (Es decir, derivable y con derivada continua) tal que para todo $x > 0$, la longitud de curva del gráfico de f entre 0 y x es $\operatorname{senh}(x)$ y además $f(0) = 1$

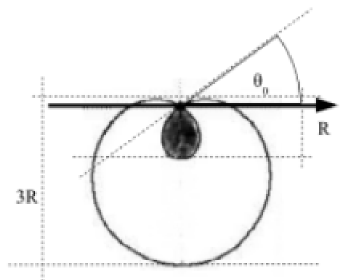
(**a**) Determine todas las funciones $f(x)$ que cumplan lo anterior de manera explícita (Para $x \geq 0$)

(**b**) Calcule la superficie del manto del sólido generado por la revolución en torno al eje X de la región bajo el gráfico de f entre $[0, x]$, $\quad \forall x > 0$

(**P**7) Dada la cardiode $\rho(\theta) = R - 2R\operatorname{sen}(\theta)$, $\quad R > 0$, se pide calcular el área de la región achurada

(**P**8) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función biyectiva, diferenciable y tal que $g(0) = 0$. Sea $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ una función diferenciable. Suponga que f y g satisfacen:

$$g(x) = \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(t))dt + f(x)$$



(a) Pruebe que $f(x) = \tanh(g(x))$

(b) Calcule la integral $\int_0^{x^3} (\tanh(t))^2 dt$
Indicacion: Observe que $f(g^{-1}(x)) = \tanh(x)$

(**P**9) Considere la función $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1) \\ g(x) & \text{si } x \in [1,3] \end{cases}$$

Con $g(x)$ una función decreciente en $[1,3]$ que cumple $g(1) = 2$ y $g(3) = 0$. Dado $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ se pide.

(a) Para la partición $P = \{0, 1-h, x_0, x_1, ..., x_n\}$ donde $x_i = 1 + ih, \quad i = 1, ..., n$ y $h = \frac{2}{n}$ Calcule la suma inferior $s(f,P)$ y la suma superior $S(f,P)$.

(b) Demeustre que

$$S(f,P) - s(f,P) = h + \sum_{i=1}^{n} (g(x_{i-1}) - g(x_i))h$$

Calcule la sumatoria y deduzca que f cumple con la condición de Riemann indicando para qué valores dde h se cumple.

(c) En el caso particular de $g(x) = 3 - x$ calcule explícitamente $s(f,P)$ en términos de n y pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,P) = 3$

(**P**10) La función $y = f(x)$ está definida implícitamente por la ecuación:

$$\int_1^x y(t)\cos(\frac{\pi}{t})dt + \int_0^{y(x)} \operatorname{sen}(\pi t)dt = \frac{1}{2\pi} \quad 0 < y < \frac{1}{2}$$

Calcule $y(1)$ e $y'(1)$