

MA1002-1 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Matías Godoy

Auxiliar: Cristóbal Valenzuela Musura

Auxiliar 6 : Primitivas

29 de Diciembre de 2017

Recordemos:

- Sea F continua en I y derivable en su interior. Diremos que F es primitiva de f sobre I si y sólo si:

$$\forall x \in \text{Int}(I), F'(x) = f(x)$$

- Las primitivas difieren en a lo más una constante y denotaremos el conjunto de las primitivas de f por $\text{Int}(I)$. Por tanto si F es una primitiva de f tenemos que $\int f = F + c$.

- Si f y g son funciones y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$1. \int f'(x) dx = f(x) + c.$$

$$2. \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x).$$

$$3. \int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

$$4. \int \alpha f = \alpha \int f$$

- Si $u = g(x)$, entonces:

$$\int f(u) du = \int (f \circ g)(x) \cdot g'(x) dx$$

- Integración por partes:**

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Algunas Primitivas:

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \forall n \neq -1$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$3. \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$4. \int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$5. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

$$7. \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sqrt{1-x^2} + C$$

$$8. \int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$$

$$9. \int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$$

$$10. \int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$$

$$11. \int \text{cosec}^2(x) dx = \text{cotg}(x) + C$$

$$12. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

P1. [Varios]

- a) Resuelva mediante sustituciones adecuadas:

$$\text{i) } \int \frac{\ln x}{x} dx \quad \text{ii) } \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx \quad \text{iii) } \int x\sqrt{1-x^2} dx$$

- b) Resuelva mediante integración por partes:

$$\text{i) } \int x \ln x dx \quad \text{ii) } \int x^3 e^{x^2} dx \quad \text{iii) } \int \sec^3(x) dx \quad \text{iv) } \int \cos(\ln(x)) dx$$

c) Resuelva:

$$\text{i) } \int (\arcsin x)^2 dx \qquad \text{ii) } \int \tan^5(x) dx$$

P2. [P1 a) Control 2, Año 2015]

Calcule las siguientes integrales:

$$\text{i) } \int \frac{x^3 + 2}{x^3 + x^2} dx \qquad \text{ii) } \int \frac{1 + \cosh(x)}{\sinh^2(x)} dx$$

P3. [Recurrencias y sistemas de ecuaciones]

a) Calcule:

$$I_n = \int x^n e^x dx \qquad J_n = \int (\ln x)^n dx$$

b) Sean $a, b \neq 0$. Calcule:

$$I = \int e^{ax} \sin(bx) dx \qquad J = \int e^{ax} \cos(bx) dx$$

Hint: Construya un sistema de ecuaciones con I y J .

P4. Sean f, g y h funciones.

a) Calcule $\int \arcsin(x) dx$. Inspírese en eso para calcular $\int f^{-1}(x) dx$.

b) Si f es derivable, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$ y $f'(x) = -f(x)g(x)$. Demuestre que:

$$\int g(x) dx = -\ln(f(x)) + C$$

c) Use la parte b) para demostrar que si h satisface $\int h(x) dx = h(x) + K$ y $h(x) \neq 0$, entonces $f(x) = e^{x+C}$.