Guia 2

Diciembre de 2017

P1. (TVM) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con $f(2) = 0$. Se define la función $F(x) = (x-1)^2 f(x)$. Aplique el Teorema del Valor Medio adecuadamente para probar que existe un $\xi \in (1, 2)$ tal que $F''(\xi) = 0$

P2. (Derivadas) Sean $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones crecientes y derivables de signo constante: $g(x) < 0$ y $h(x) > 0$. Determinar para qué valores de x, la función f siguiente, es creciente o decreciente.

$$f(x) = g(b - ax^3)h(\arctan(cx))$$

Donde a, b, c son constantes positivas.

P3. (El Acertijo)

- **(a)** De un ejemplo de una función f diferenciable en todo $\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe, pero el límite $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$
- **(b)** Pruebe que si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ existen, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ (*Hint: ¿Qué pasa con f en infinito si $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) > 0$?*)
- **(c)** Pruebe que si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x)$ existen, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0$

P4. Suponga que la función f cumple la ecuación

$$f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$$

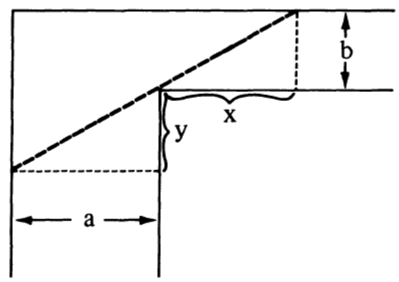
para alguna función g y para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que si f es 0 en dos puntos diferentes, entonces f debe ser nula en el intervalo definido por ambos puntos (Hint: Recuerde que si x es máximo local, entonces $f''(x) \leq 0$, y si es mínimo local entonces $f''(x) \geq 0$.)

P5. Sea f una función tal que $f''(x)$ existe y es continua. Muestre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

Por otro lado encuentre una función tal que dicho límite exista, pero que no sea dos veces diferenciable (Hint: Estudie la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$)

P6. (Optimización) Dos pasillos, de anchos a y b, se encuentran de manera perpendicular (Ver figura). ¿Cuál es el largo máximo de una escalera que pueda ser trasladada de manera horizontal y de un pasillo a otro ? (Hint: Se recomienda estudiar el x y el y agregados a la figura)



P7. (Análisis de función) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = -xf(x), \quad g'(x) = xg(x), \quad f(0) = g(0) = 1$$

(a) Pruebe que $f \cdot g$ es constante. Deduzca que $f(x) > 0,\ g(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

(b) Estudie crecimiento, máximos y mínimos de f-

(c) Calcule f'' en función de f (Y no de f'). Estudie convexidad y concavidad de f.

(d) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe un $\xi \in (0, x)$ tal que $f(x) = -f''(\xi)$

(e) Estudie el crecimiento de f' y demuestre que f' es acotada en $\mathbb{R}$

(f) Deduzca que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Bosqueje un gráfico de f a partir de todos los pasos anteriores.