Auxiliar 4: Teoremas de Derivadas

21 de Diciembre 2017

P1. Se quiere calcular el costo mínimo de un estanque para agua potable de $45\pi m^3$ de capacidad que se construirá de forma de un cilindro circular de base plana y coronado por una semiesfera, sabiendo que los costos unitarios de la obra construida son: $\$pm^2$ para la base, $\$3pm^2$ para el manto, $\$4pm^2$ para la cúpula. Siga las siguientes indicaciones:

(a) Si h es la altura del cilindro y r su radio, deduzca que

$$h(r) = \frac{45}{r^2} - \frac{2}{3}r$$

Y muestre que el costo del estanque en función de r está dado por

$$c(r) = \pi p(9r^2 + 6rh(r))$$

(b) Determinar las dimensiones del cilindro de manera que el costo del estanque sea mínimo y explicite el valor del costo mínimo. Justifique su respuesta.

P2. **(a)** Se define la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{\operatorname{senh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sabiendo que f es diferenciable en 0 y g es dos veces diferenciable en 0 sepide determinar, justificando, el valor de $g(0)$ y los valores de a y $f'(0)$ en función de $g'(0)$ y $g''(0)$

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{f(x + \delta x)}{f(x)} \right)^{1/\delta}$$

existe, es positivo y calcúlelo.

P3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b) = 0$. Demuestre que existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$

P4. Estudiar completamente la función dada por $f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3\ln(x)}{x}$. Para ello:

(a) Encuentre el dominio de f y sus ceros.

(b) Asíntotas de todo tipo.

(c) Calcule f' y sus ceros. Determine intervalos de crecimiento y decrecimiento al igual que existencia de máximos y mínimos.

(d) Calcule f'', convexidades y puntos de inflexión.

(e) Determine el recorrido de f y su gráfico.

P5. **(a)** De todas las rectas tangentes al gráfico de $f(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$ encuentre las rectas de máxima y ínima pendiente si es que existen.

(b) Se debe construir una pirámide regular de base cuadrada de modo que la superficie total de sus 4 caras sea $S_T = 4S$ donde S es la superficie de cada cara lateral. Se pide encontrar el máximo volumen de esta pirámide en función de S ($V_{\text{máx}} = V(S)$) para lo cual proceda como sigue:

I) Demuestre que el valor de la altura H de una cara de la pirámide, que es un triángulo isóceles, es $H = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + x^2}$ donde h es la altura de la priámide y x la longitud del lado de la base

II) Deduzca una relación entre x, h y S y encuentre una expresión $V(x)$ para el volumen de la pirámide

III) Determine las dimensiones de x y h que producen el máximo volumen. Justifique que es un máximo y calcule $V_{\text{máx}}$