

Auxiliar 3

Diciembre de 2017

P1. Demuestre que **no** existe ninguna función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la propiedad de que para cada $a \in \mathbb{R}$ existen exactamente dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ que verifican $f(x) = f(y) = a$

P2. Senn $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables que verifican lo siguiente:

$$g(x) = xf(x) + 1 \quad g(x+y) = g(x)g(y) \quad f(0) = 1$$

(a) Demuestre que $g'(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

(b) Demuestre que $\forall n \geq 1, g(x) = xf^{(n)}$ y calcule $f^{(n)}(0)$

P3. Considere la función $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$. Demuestre que esta función es uniforme continua en el intervalo $(0, 1]$

P4. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tal que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Demuestre que existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > g(x) + \delta$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Es cierta la propiedad si cambiamos el dominio $[a, b]$ por $\mathbb{R}$?

P5. Sea f una función diferenciable en todo $\mathbb{R}$ e impar. Demuestre que su derivada f' es una función par.

De la misma manera, muestre que la derivada de una función par es impar.

P6. (a) Sea f una función continua y periódica de periodo p . Muestre que f es uniforme continua *Hint: Puede ser útil escribir un $x \in \mathbb{R}$ como $x = np + r$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $r \in [0, p]$*

(b) Sean f, g, h las funciones definidas por:

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor, \quad g(x) = \sin(\pi f(x)), \quad h(x) = \cos(\pi f(x))$$

Estudie continuidad uniforme en de h y g en $\mathbb{R}$. También estudie continuidad uniforme de h y g en $[0, 1)$

P7. Sea $c > 1$ una constante y f una función diferenciable en 0. Calcule

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ch) - f(h)}{h}$$