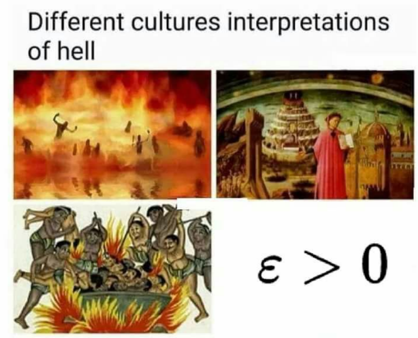

Guia Control 1

Diciembre de 2017

P1. (Subsucesiones) Demuestre que si $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es tal que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ (Es decir, para el caso $+\infty$, $\forall \varepsilon > 0, \exists m > 0$ tal que $x > m \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$) entonces toda sucesión de reales (x_n) tiene una subsucesión $(x_{\phi(n)})$ tal que $g(x_{\phi(n)})$ converge. (Hint: Póngase en casos adeacuados sobre $g(x_n)$)

P2. (Continuidad) Considere la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in Q, \text{ con } p \in \mathbb{Z} \text{ y } q \in \mathbb{N} \text{ coprimo (ie. la fracción es irreductible)} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(a) Pruebe, usando sucesiones, que la función es discontinua (*Hint: Recuerde que los irracionales son densos en* $\mathbb{R}$)

(b) Pruebe que la función es continua para todo $\bar{x}$ irracional. Para ello recuerde la propiedad arquimediana que dice, $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$tal que$\frac{1}{n} < \varepsilon$. (*Hint: Ocupe la definición $\varepsilon - \delta$ y ocupando la propiedad arquimediana encuentre un intervalo adecuado en torno a $\bar{x}$*)

P3. (TVI) Sea $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $h(0) = h(1)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Pruebe que existe c tal que

$$h(c) = h\left(c + \frac{1}{n}\right)$$

Hint: Razone por contradicción

P4. (Derivadas aplicadas) Imagine una carretera en donde el límite de velocidad esta especificado en cada punto de esta. En otras palabras, hay una función L tal que el límite de velocidad a x millas del inicio de la carretera es $L(x)$. Dos autos, A y B, estan conduciendo a lo largo de esta carretera; La posición del automóvil A a tiempo t es descrito por la función $a(t)$, y para el auto B usamos la función $b(t)$.

(a) ¿Qué ecuación expresa el hecho que el auto A siempre viaja a la máxima velocidad permitida? *(Hint: La respeusta NO es $a'(t) = L(t)$*

(b) Suponga que A siempre viaja a velocidad límite, y que la posición de B a tiempo t es la posición de A a tiempo $t - 1$. Demuestre que B siempre viaja a velocidad límtie

(c) Suponga que B siempre se queda detrás de A a una dsitancia constante. ¿Bajo que condiciones tendremos que B sigue viaando a velocidad límite?

P5. (Derivadas) Encuentre $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\,\text{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si} x = 0 \end{cases}$$

Donde g es una función tal que $g(0) = g'(0) = 0$.

P6. (Derivadas) Calcule por definición la derivada de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ definida en el intervalo $(0, 1)$. También demuestre que para cada x en $(0, 1)$, la recta perpendicular a la recta tangente a la función en el punto x debe pasar por el origen. Grafique y de un argumento geométrico (i.e tipo PSU) de por qué esto último es cierto.