Auxiliar 2: Propiedades de funciones continuas

Marzo de 2016

P1. Demuestre que $f(x) = x^2 + 3$ es continua mediante la definición $\varepsilon - \delta$

P2. Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, con un mínimo global único en el punto x_0 y que satisface que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ (Recuerde que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists m > 0$ tal que $x > m \Rightarrow f(x) > M$).

Sea x_n una sucesión que cumple $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq f(x_0) + \frac{1}{n}$ se pide:

(a) Prueba que si la sucesión tiene alguna subsucesión convergente, entonces dicho límite necesariamente es x_0

(b) Pruebe que x_n tiene al menos una subsucesión convergente.

P3. **(a)** Sea una función continua f tal que en el punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x) > 0$. Demuestre que existe un intervalo I que contiene a $\bar{x}$ tal que $\forall x \in I, f(x) > 0$

(b) Sean ahora dos funciones ocntinuas h y g definidas en todo $\mathbb{R}$. Considere ahora la función $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $M(x) = \max\{h(x), g(x)\}$. Muestre que si $L(\bar{x}) = h(\bar{x}) \neq g(\bar{x})$ entonces existe un intervalo I donde $M(x) = h(x) \quad \forall x \in I$.

(c) Finalmente pruebe que M es continua (Hint: Vea que pasa en los puntos donde $h(x) = g(x)$)

P4. Demuestre que si $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es tal que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (Es decir, para el caso $+\infty$, $\forall\varepsilon > 0, \exists m > 0$ tal que $x > m \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$) entonces toda sucesión de reales (x_n) tiene una subsucesión $(x_{\phi(n)})$ tal que $g(x_{\phi(n)})$ converge.

P5. **(a)** Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Demuestre que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$

(b) Demuestre que la ecuación $x^3 = 2^x$ tiene solución

(c) Demuestre que **no** existe ninguna función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que para cada $a \in \mathbb{R}$ existen exactamente dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ que verifican $f(x) = f(y) = a$

(d) Sea $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $h(0) = h(1)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Pruebe que existe c tal que

$$h(c) = h\left(c + \frac{1}{n}\right)$$